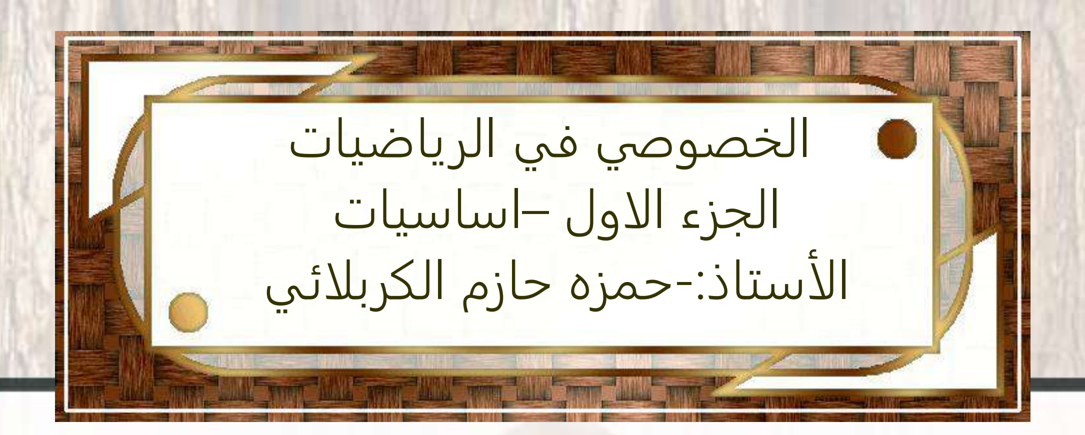

الخصوصي في
الرياضيات
الجزء الاول
الفصل الاول
اعداد الاستاذ
حمزة حازم الكربلائي
للصف السادس العلمي
بفرعيه الاحيائي و التطبيقي
07828808092



رؤيا ملزمة الاساسيات

هي اعداد طالب متميز بمادة الرياضيات فـ مادة الرياضيات من المواد التي , تحتاج الى اساسيات قبل البدا بدراستها

📖عزيزي الطالب ان الاساسيات التي بين يديك هي منقذك من اصغر الاخطا التي من الممكن ان تحاسب عليها وزاريا فأتقنها جيدا

📖 عزيزي الطالب ان الاساسيات التي بين يديك هي لاتشمل الرياضيات فقط ونما تشمل (الفيزياء والكيمياء) .

📖عزيزي الطالب ان اهملت هذه الاساسيات فانك سوف تعتمد على الحفظ وهذه من الاخطا التي يقع بها اغلب الطلبة

حكمة

رحلة النجاح لاتتطلب البحث عن ارض جديدة ولكنها تتطلب الأهتمام بالنجاح والرغبة في تحقيقه والنظر الى الأشياء بعيون جديدة

الاستاذ:-حمزه حازم الكربلائي
بكلوريوس علوم رياضيات......... الجامعة المستنصرية
07828808092



كيف نبدا بالسوال:-

اقراه السوال ← خطط لطريقة الحل ← نكتب القانون المناسب ← نعوض المعلوم

1-اساسيات (الاشارات) عند الضرب والجمع

عند الضرب

a-اذا جانت الاشارات متشابه (الناتج موجب) يعني

$$+6 \times +4 = +24$$

b-اذا جانت الاشارات مختلفه (الناتج سالب)يعني

$$-6 \times +4 = -24$$

عند الجمع

a-اذا جانت الاشارات متشابه (نجمع والناتج يكون نفس الاشاره)يعني

$$+2 + 3 = +5 \qquad -4 - 2 = -6$$

b-اذا جانت الاشارات مختلفه(نطرح وناخذ اشاره الرقم الاكبر) يعني

$$-4 + 2 = -2$$
$$+8 - 4 = +4$$

ملاحظه:-اذا ما جان عدنه اشاره قبل الرقم معناها اشاره الرقم +(موجب)

$$22 = +22$$

ملاحظه:-كل رقم صغير مطروح من رقم جبير الناتج راح يكون سالب -

2-اساسيات (الاشارات) عند القسمه

a-رقم سالب ÷رقم سالب ينطي ناتج (موجب)

b-رقم موجب÷رقم موجب ينطي ناتج(موجب)

c-رقم سالب ÷رقم موجب ينطي ناتج (سالب)

d-رقم موجب ÷رقم سالب ينطي ناتج (سالب)

$$-18 \div -6 = +3$$

$$\frac{-60}{+3} = -20$$

ملخص اعلاه :-من نقسم عددين مختلفين بالاشاره الناتج يكون بالسالب

3-اساسيات الجمع والطرح بين الكسور (توحيد المقامات)

a-اذا جانت المقامات متشابه ناخذ مقام واحد منهم ونجمع البسط يعني

$$\frac{\text{بسط }1}{\text{مقام}} + \frac{\text{بسط }2}{\text{مقام}} = \frac{(\text{بسط }1 + \text{بسط }2)}{\text{مقام}}$$

متشابه

مقام واحد منهم

$$\frac{1}{12} + \frac{6}{12} = \frac{1+6}{12} = \frac{7}{12}$$

b-زين استاذ اذا جانت المقامات مختلفه (هنا صديقي لازم نوحد مقامات) شوف المخطط

$$\frac{1\text{بسط}}{1\text{مقام}}+\frac{2\text{بسط}}{2\text{مقام}}=\frac{}{1\text{مقام}\times 2\text{مقام}}$$

مختلفه

مقام واحد منهم

البسط يكون (المقام الجديد الذي ضهر من حاصل ضرب المقام الاول في الثاني)÷المقام الاول ونضربه في البسط – او+ (المقام الجديد الذي ضهر من حاصل ضرب المقام الاول في الثاني)÷المقام الثاني في البسط

مثال بسيط

$$\frac{2}{5}+\frac{3}{10}=?$$

مختلفه

$$\frac{\frac{50}{5}\times 2+\frac{50}{10}\times 3}{50}=\frac{10\times 2+5\times 3}{50}=\frac{20+15}{50}$$

$$=\frac{35}{50}=\frac{7}{10}$$

خلاصه اعلاه (لو شاهد عزيزي الطالب ان العمليه شبيه بضرب الوسطين في طرفين يعني نكدر نحل بشكل مباشر شلون؟؟؟؟؟

$$\frac{2}{5}+\frac{3}{10}=\frac{2\times 10+5\times 3}{5\times 10}$$

ملاحظه:-عزيزي الطالب عند قسمه كسر على كسر ثاني فان العمليه تحول الى ضرب مع قلب الكسر الثاني

$$\frac{11}{4} \div \frac{11}{8} = \frac{11}{4} \times \frac{8}{11} = \frac{22}{11} = 2$$

4-اساسيات الاعداد العشريه

الجمع :-جمع عدد عشري مع اي عدد عشري قبل الجمع نساوي عدد المراتب الي على يمن الفارزه باضافه صفر او اكثر بعد ماساوينه المراتب نجمع جمع اعتيادي

$$6.3 + 4.32 = 6.30 + 4.32 = 10.62$$

مراتب متساويه فضفت صفر علمود يتساوه

$$4.01 + 8.3 = 4.01 + 8.30 = 12.31$$

الطرح:-طرح عدد عشري مع عدد عشري (بنفس الطريقه اعلاه)

طرح عدد عشري مع اي عدد عشري قبل الطرح نساوي عدد المراتب الي على يمن الفارزه باضافه صفر او اكثر بعد ماساوينه المراتب نطرح طرح اعتيادي

$$2.07 - 1.3 = 2.07 - 1.30 = 0.77$$

$$3.2 - 0.54 = 3.20 - 0.54 = 2.66$$

الضرب:-

1-نشيل الفوارز

2-نضرب ضرب اعتيادي

3-نضع الفارزه (بعدد المراتب التي على يمين الاعداد)

$$5 \times 0.06 =$$

006
5
030

كم مرتبه ع يمين الاعدد (مرتبتين)نحسب من اليمين الى اليسار مرتبتين ونضع الفارزه ويصبح الناتج 0.30

القسمه:-

قسمه عدد صحيح على عدد عشري

1-نحذف الفوارز

2-نضيف اصفار للعدد الصحيح بعدد المراتب التي بعد الفارزه من اليمين

3-نقسم

$$\frac{6}{0.002} = \frac{6000}{2} = 3000$$

قسمه عدد عشري على عدد عشري

1-نحذف الفوارز

2-نضيف اصفار للبسط (بعد ان نطرح عدد المراتب التي بعد الفارزه من اليمين في المقام من مراتب البسط)

$$\frac{0.1}{0.01} = \frac{10}{1} = 10$$

مرتبتين2 — مرتبه1

مرتبه 1=

نضيف صفر فقط لان طرح مرتبه 1

ملاحظة:-اذا جان حاصل طرحهم 0 معناه فقط نحذف الفوارز ونقسم

5-تحليل التجربه

نستخدم تحليل التجربه في الحدوديه الثلاثيه المتكونه من ثلاث حدود

فمثلا $x^2 - 2x + 3 = 0$

نشوف الحد الاول منين جاي (من x في x) الحد الثالث منين جاي (من1في 3)

$$(x-3)(x+1) = 0$$

هسه هنا لازم يكون ضرب الحد القريب في القريب –او+الحد البعيد في البعيد لازم يطلع الحد الوسط

$$(x-3)(x+1) = 0$$

-3x

x

هو الحد الوسط -2x

اذا طلع الحد الوسط معناه الحل صح والحدوديه تحل بالتجربه اما اذا مطلع الحد الوسط فنالجا الدستور

6- بالدستور

قانون الدستور

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

a-هو معامل x^2

b-هو معامل x

c-هو الحد الخالي من x (ونطبق القانون)

ملاحظه :- مهمه جداً عدد الجذور(اي النواتج)تكون بعدد درجه المعادله

7-حل المعادله البسيطه

1-نجعل المتغيرات في جهه والثوابت في جه اخرى

2-نقسم على معامل المتغير اذا كان غير ال1 فمثلا

$$2x + 4 = -7x - 14 \rightarrow 2x + 7x = -14 - 4$$
$$9x = -18] \div 9 \rightarrow x = -2$$

عند نقل حل من طرف الى الطرف الثاني تتغير اشارته من موجب للسالب وبالعكس

8-حل المعادله الجذريه

1-نربع الطرفين او نكعب الطرفين حسب الجذر الموجود

2—نقوم بالعمليات المناسبه لكمال الحل

$\sqrt{20x - 100} = x$ ➡ $20x - 100 = x^2$ ➡ $x^2 - 20x + 100 = 0$

نحل بالتجربه

$(x - 10)(x - 10) = 0$

9-حل المعادلات بطريقه الحذف او التعويض

الحذف:-نخلي واحد من المتغيرات متساوي شلون مثلا نحتاج 3 علمود نساوي المتغير فهنا نضرب المعادله كلها في 3

بعدها اذا جانت اشارات الحد الي ساويته متشابه لازم نغير اشاره المعادله الثانيه علمود نحذف اما اذا مختلفه فنحذف مباشرا

اذا مختلفه نكول بالجمع اذا متشابه نكول بالطرح ونغير اشاره المعادله الثانيه مثلا

$$x + 2y = 0 \ldots\ldots\ldots 1$$
$$3x + y = 5 \ldots\ldots\ldots 2$$

نريد نحذف x فلازم نضرب المعادله الاولى في 3

$$3x + 6y = 0 \dots\dots\dots.1$$
$$3x + y = 5 \dots\dots\dots\dots 2$$

اشارات متشابه فلازم نغير اشاره المعادله الثانيه ونكول بالطرح

$$3x + 6y = 0$$
$$-3x - y = -5 \rightarrow (6y - y) = (0 - 4)$$
$$\rightarrow 5y = -5] \div 5 \rightarrow y = -1$$

نعوض ال y بوحده من المعادلات علمود نطلع قيمه x

$$3x - 1 = 5 \rightarrow 3x = 6 \rightarrow x = 2$$

التعويض:-نخلي متغير بدلاله الثانيه وعوضه بلمعادله الثانيه

$$x + 2y = 0 \dots\dots\dots 1$$
$$3x + y = 5 \dots\dots\dots 2$$
$$x + 2y = 0 \rightarrow x = -2y$$ نعوضها في 2

$$3(-2y) + y = 5 \rightarrow -6y + y = 5$$
$$-5y = 5 \rightarrow y = -1$$

نعوض ال y بوحده من المعادلات علمود نطلع قيمه x

$$3x - 1 = 5 \rightarrow 3x = 6 \rightarrow x = 2$$

عزيزي الطالب ان طريقه التعويض هي الاسهل والافضل لك

10-قواعد الاسس

1-عند الضرب تجمع الاسس اذا جانت الاساسات متشابه

$6^6 \times 6^4 = 6^{10} = ?$ الناتج عليك

2-اذا اختلفت الاساسات وتشابهت الاسس (نضرب الاساس)ونخليهم ثنينهم ب اس واحد

$4^2 \times 3^2 = (4 \times 3)^2 = (12)^2 = ?$ الناتج عليك

3-عند القسمه تطرح الاسس اذا جانت الاساسات متشابه

$$\frac{x^5}{x^3} = x^{5-3} = x^2$$

4-عند الرفع تضرب الاسس

$$(x^3)^2 = x^6$$

5-الاس يتوزع على عمليه الضرب وعلى عمليه القسمه

$$(xy)^3 = x^3y^3$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{x^2}{y^2}$$

6-كل شي اسه صفر ينطي 1



11-قوانين الدوال المثلثيه

عزيزي الطالب ان قوانين الدوال هي مهمه في عمليه الاشتقاق والتكامل

1-النسب المثلثيه (لدوال ال sin و cos)

الزاويه	0	30	45	60	90	180	270	360
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
Sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
Cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1

2-القوانين

مشتقه الدوال الدائريه

المشتقه	الداله
$\cos$(زاويه) * مشتقه الزاويه	$\sin$(زاويه)
$-\sin$(زاويه) * مشتقه الزاويه	$\cos$(زاويه)
$\sec^2$(زاويه) * مشتقه الزاويه	$\tan$(زاويه)
$-csc^2$(زاويه) * مشتقه الزاويه	$\cot$(زاويه)
sec(زاويه) $\tan$(زاويه) * مشتقه الزاويه	$\sec$(زاويه)
$-csc$(زاويه) $\cot$(زاويه) * مشتقه الزاويه	$\csc$(زاويه)

قواعد اشتقاق :-

1-مشتقه الداله الثابته تساوي صفر (شنو داله ثابته يعني داله بس رقم مو متغير المتغير حرف مثل X;Y;Z هذني متغيرات)

$if\ y = a \rightarrow \frac{dy}{dx}=0$ رقم ثابتa

2-مشتقه داله المتغير يعني الي بيها متغير واحد(يعني متغير مرفوع لاس شنسوي _الاس ينزل في الداله نفسه تنقص من الاس 1)

➢ $if\ y = x^n \rightarrow nx^{n-1}$

3-المشتقه تتوزع عله عمليه الجمع والطرح (عندك متغيرات توزع عليهم الشتقاق يعني تشتق كل واحد وحده)

4-مشتقه حاصل ضرب دالتين (الاولى * مشتقه الثانيه+ الثانيه *مشتقه الاولى)

5-مشتقه قسمه دالتين

$$f'(x) = \frac{(\text{مشتقه المقام})(\text{البسط}) - (\text{مشتقه البسط})(\text{المقام})}{\text{المقام}^2}$$

6-مشتقه الثابت في الداله (ينزل الثابت نفسه في مشتقه الداله)

7-مشتقه الداله الاسيه(الي تتكون من حدين او اكثر) الاس مالتهم لايساوي1 (الاس ينزل في ناقص الاس1 في مشتقه داخل القوس) القوس نفسه

قوانين

#اولا: الدوال المثلثية الاساسية

$\sin x, \cos x, \tan x$

#ثانيا: الدوال المثلثية الأخرى (مقلوبات الأساسية):

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \quad , \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

#ثالثا: علاقات مهمة بين الدوال المثلثية

(1) $\boxed{\sin^2 x + \cos^2 x = 1}$

$1 - \sin^2 x = \cos^2 x$

$1 - \cos^2 x = \sin^2 x$

(2) $\boxed{1 + \tan^2 x = \sec^2 x}$

$\sec^2 x - 1 = \tan^2 x$

$\sec^2 x - \tan^2 x = 1$

(3) $\boxed{1 + \cot^2 x = \csc^2 x}$

$\csc^2 x - 1 = \cot^2 x$

$\csc^2 x - \cot^2 x = 1$

(4) $\boxed{\sin 2x = 2\sin x \cos x}$

$\sin 4x = 2\sin 2x \cos 2x$

$\sin x = 2\sin\frac{1}{2}x \cos\frac{1}{2}x$

(5) $\boxed{\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x}$

$\cos 4x = \cos^2 2x - \sin^2 2x$

$\cos x = \cos^2\frac{1}{2}x - \sin^2\frac{1}{2}x$

(6) $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$

(7) $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$

8) $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$

(9) $\tan(x \pm y) = \dfrac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$

(10) $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x \quad , \cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$

$\tan(\frac{\pi}{2} - x) = \cot x \quad , \cot(\frac{\pi}{2} - x) = \tan x$

$\sec(\frac{\pi}{2} - x) = \csc x \quad , \csc(\frac{\pi}{2} - x) = \sec x$

(ملاحظة : $\frac{\pi}{2} = 90^\circ$)

(11) $\sin(-x) = -\sin x$

$\cos(-x) = \cos x$

$\tan(-x) = -\tan x$

12-بعض قوانين الاشكال الهندسيه

FORMULAS FROM GEOMETRY

Triangle المثلث
$h = a \sin \theta$
Area $= \frac{1}{2}bh$
(Law of Cosines)
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$

Right Triangle المثلث القائم
(Pythagorean Theorem)
$c^2 = a^2 + b^2$

Equilateral Triangle المثلث المتساوي الاضلاع
$h = \frac{\sqrt{3}s}{2}$
Area $= \frac{\sqrt{3}s^2}{4}$

Parallelogram متوازي الاضلاع
Area $= bh$

Trapezoid شبه المنحرف
Area $= \frac{h}{2}(a + b)$

Circle الدائرة
Area $= \pi r^2$
Circumference $= 2\pi r$

Sector of Circle قطاع الدائرة
(θ in radians)
Area $= \frac{\theta r^2}{2}$
$s = r\theta$

Circular Ring الحلقة الدائرية
(p = average radius,
w = width of ring)
Area $= \pi(R^2 - r^2)$
$= 2\pi pw$

Sector of Circular Ring القطعة الدائرية
(p = average radius,
w = width of ring,
θ in radians)
Area $= \theta pw$

Ellipse القطع الناقص
Area $= \pi ab$
Circumference $\approx 2\pi\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$

Cone المخروط
(A = area of base)
Volume $= \frac{Ah}{3}$

Right Circular Cone المخروط الدائري القائم
Volume $= \frac{\pi r^2 h}{3}$
Lateral Surface Area $= \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$

Frustum of Right Circular Cone المخروط الناقص
Volume $= \frac{\pi(r^2 + rR + R^2)h}{3}$
Lateral Surface Area $= \pi s(R + r)$

Right Circular Cylinder الاسطوانة الدائرية القائمة
Volume $= \pi r^2 h$
Lateral Surface Area $= 2\pi rh$

Sphere الكرة
Volume $= \frac{4}{3}\pi r^3$
Surface Area $= 4\pi r^2$

Wedge الموشور
(A = area of upper face,
B = area of base)
$A = B\sec\theta$

13-كيفيه استخراج العامل المشترك

العامل المشترك يكون اما (رقم –حرف –رقم وحرف)

هو الرقم الي جميع حدود المعادله تقبل القسمه عليه مثلا :-

$$2x + 8y = 0 \rightarrow 2[x + 4y] = 0$$ ثم نكمل

الحل:-الحدين يقبلن القسمه على 2 لذالك ناخذ عامل مشترك 2

ثم نكمل $x^2 - x = 0 \rightarrow x[x-1] = 0$

14-الفرق بين مربعين



شروط:-

1-شرط المعادله من حدين متكونه

2- لازم بين الحدين (علامه —)

3-الحدين الهم جذر تربيعي

الحل نفتح قوسين واحد (-) والثاني (+) اي ان

(جذر الاول − جذر الثاني)(جذر الاول + جذر الثاني) = 0

ثم نكمل $x^2 - 81 = 0 \rightarrow (x-9)(x+9) = 0$

ملاحظه:-مجموع مربعين لايوجد قانون لها

15-مجموع او فرق مكعبين

شروط:-

1-لازم المعادله متكونه من حدين

2-الاول اله جذر تكعيبي والثاني اله جذر تكعيبي

طريقة الحل:

(جذر الاول ∓ جذر الثاني)[تربيع الاول ∓ الاول في الثاني + تربيع الثاني]

حسب الاشاره الي بين الحدين

عكس اشاره القوس الاول

موجب دائما

م:-القوس الثاني يعتمد على القوس الاول وليس على السوال الاصلي

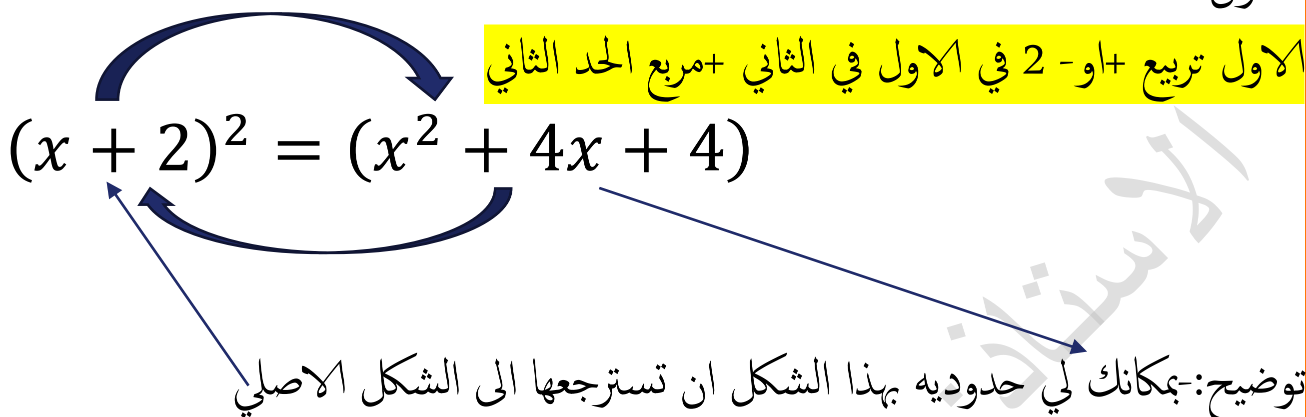
$x^3 - 27 = 0 \rightarrow (x-3)(x^2 + 3x + 9)$

16-مربع حدانيه

قوس مرفوع الى تربيع يعني (2) لايهم الاشاره التي بين الحدين –او+

القانون:-

الاول تربيع +او- 2 في الاول في الثاني +مربع الحد الثاني



$$(x+2)^2 = (x^2 + 4x + 4)$$

توضيح:-بمكانك لي حدوديه بهذا الشكل ان تسترجعها الى الشكل الاصلي

تم بحمد الله

عزيزي الطالب هذه اهم الاساسيات التي تحتاجها بكثره في الرياضيات واحيانا في الكيمياء والفيزياء فاتقنها جيدا

اعداد الاستاذ:-حمزه حازم الكربلائي

07828808092

قناة التلكرام t.me\hamzafi

الخصوصي في الرياضيات ....



ملاحظات هامة حول ملزمة الخصوصي في الرياضيات

1- يرجى من جميع الطلبة والطالبات التركيز على جميع ملاحظات الملزمة ومحتوياتها

2- يرجى من جميع الطلبة والطالبات التركيز على جميع اسئلة المنهج المقرر ودراستها بشكل جيد

3- تم طرح حلول لكل موضوع ضمان فهم المادة بصوره مميزه

4- يرجى من جميع الطلبة الأعزاء دراسة الأسئلة الوزارية بكل ادوارها

5- ترك جميع الأسئلة الأثرائية التي بعيدة عن المنهج المقرر

6- قراءة مادة الرياضيات بالورقة والقلم

7- تكون قراءة ماده الرياضيات للامتحان الوزاري لمن يقرأ على ملزمة الخصوصي

المراجعة الاولى (الملزمة باكملها) المراجعة الثانية (ملخص الرياضيات الشامل)

مع تمنياتي لجميع الطلبة بالنجاح الباهر والمستقبل الزاهر

استاذ المادة

حمزة حازم الكربلائي

07828808092





الاعداد المركبة

1 الفصـــــل الاول :- الي هو الاعـداد المركبـة ليش خلو بـالمنهج ؟ وليش نـدرســـه ؟ شنو نستفاد منه؟

شـوف صـديقي هذا الفصـل ندرسـه لان مرات عدنة معادلات نتوقف بيها او معادلات متنحل هذا الفصل لكة الحل النة بسهولة

* استاذ حجيتلي على الفصل بس اني ماعرف شنو العدد المركب باوع ...

العدد المركب :- هو العدد الي ينكتب بالصيغه $c=a+bi$

C هو رمز العدد المركب a هو الجزء الحقيقي bi هو العدد التخيلي

ملاحظه:-كل عدد بيه i هو عدد تخيلي

أنواع الاسئلة علمود تعرف شوكت يريد من عند العدد المركب

1- جد العدد المركب

2- جد الصيغة الجبرية

3- جد الصيغة العادية

امثله بسيطة عن شكل العدد المركب





$1)1+3i$ $3)2-2i$

$2)2+4i$ $4)8+6i$

(ملاحظات)

a- وين متشوف i^2 تعوض مكانه -1

b- وين متشوف i^3 تعوض مكانه $-i$

c- وين متشوف i^4 تعوض مكانه 1

زين استاذ اذا انطاني اس أعلى من الي منطيهم انته شلون باوع على هاي القاعده

$i^n \rightarrow$ $n \rightarrow 4$ هو اس اعله من او يساوي









1- اذاجان الاس يقبل القسمه على 4 بدون باقي الناتج مالتنه 1
2- اذا جان الاس يقبل القسمه على 4 والباقي 1 الناتج مالتنه i
3- اذا جان الاس يقبل القسمه على 4 والباقي 2 الناتج مالتنه 1-
4- اذا جان الاس يقبل القسمه على 4والباقي 3 الناتج مالتنه i-

ملاحظه:-اذا جانت الاس مال الi اكبر من 100 نقسم بس الاحاد والعشرات على 4 والباقي هو اس مال i الجديد

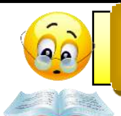
قبل لا ناخذ امثله على الحجي الفوك ناخذ ملاحظه

اذا جان عدنه بالســؤال عدد مركب يتكون من جزء حقيقي بس (نكمله أحنة) واذا جان جزء تخيلي بس (نكمله أحنة) زين شلون استاذ ؟ نكمله باضافه 0 اذا جان بس تخيلي ونكملة باضافة 0i اذا جان بس حقيقي

1) $5 \rightarrow$ عدد مركب غير كامل $\rightarrow 5 + 0i$ عدد مركب كامل
2) $5i \rightarrow$ عدد مركب غير كامل $\rightarrow 0 + 5i$ عدد مركب كامل

ملاحظة :- يمكن ان نضع $i = \sqrt{-1}$

امثلة :- متنوعة



1) $i^2 = -1$

2) $i^3 = -i$

3) $i^4 = 1$

4) $i^6 = -1$

5) $i^7 = -i$

6) $i^{13} = i$

7) $i^{50} = -1$

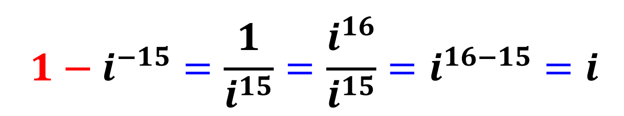
8) $i^{150} = i^2 = -1$ نقسم 50 على 4 والباقي هو 2 اس i الجديد

9) $i^{1193} = i$



ملاحظة / اذا جان عدنه i مرفوع الى اس سالب (الحل انزل ال i أس سالب للمقام بعدها نعوض مكان ال1 الي بالبسط i أس اعلى من المقام يقبل القسمه عله 4 بدون باقي وراها نستعمل خاصيه عند القسمة تطرح الاسس)

مثال /جد ناتج ما يلي



$1-\ i^{-15}=\frac{1}{i^{15}}=\frac{i^{16}}{i^{15}}=i^{16-15}=i$

$2-\ i^{-53}=\frac{1}{i^{53}}=\frac{i^{56}}{i^{53}}=i^{56-53}=i^{3}=-i$

2ط $1)\ i^{-15}=i^{-15}.\,i^{16}=i$

$2)\ i^{-53}=i^{-53}.\,i^{56}=i^{3}=-i$

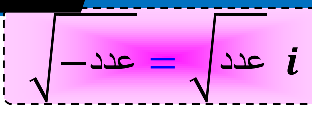
ملاحظة :- اذا جان اس i يتكون من حدين واحد من الحدين بيه حرف (متغير) الحرف ينهمل وناخذ الحد الي يكون رقم صافي مثال :-

$1-\ i^{4n+2}=i^{2}=-1$

$2-\ i^{12n+93}$

$=i^{93}=i$

ملاحظة :- اذا جان عدنه سالب جوه الجذر التربيعي (نشيل السالب نحط بمكانه i على يمين الجذر)



مثلا

$1)\sqrt{-16}=\sqrt{16}i=4i$ $\quad 3)\sqrt{\frac{-16}{9}}=\frac{4}{3}i$

$2)\sqrt{-25}=\sqrt{25}i=5i$

مثال //اكتب الاعداد الآتية على الصيغة العادية a+bi

$1)\ -5=-5+0i$

$2)\ \sqrt{-100}=\sqrt{100}i=10i=0+10i$

$3)\ -1-\sqrt{-5}=-1-\sqrt{5}i$

$4)\ \frac{1+\sqrt{-25}}{4}=\frac{1+\sqrt{25}i}{4}=\frac{1}{4}+\frac{5}{4}i$

العمليات على مجموعة الاعداد المركبه

1- جمع الاعداد المركبة

شلون نجمع عددين مركبين شوف صديقي لاتحير بيها مجرد **(نجمع العدد الحقيقي مع الحقيقي يعني الي مابيهم i + التخيلي مع التخيلي الي بيهم i)**



مثال / أجمع الاعداد المركبة التالية

$1)\left(3+4\sqrt{2}i\right),\left(5-2\sqrt{2}i\right)$

$\left(3+4\sqrt{2}i\right)+\left(5-2\sqrt{2}i\right)=(3+5)+\left(4\sqrt{2}-2\sqrt{2}\right)i$

$=8+2\sqrt{2}\,i$

$2)\ 3\ ,\ \ 2-5i$

$(3+0i)+(2-5i)=(3+2)+(0-5)i=5-5i$

$3)1-i\ ,3i$

$(1-i)+(0+3i)=(1+0)+(-1+3)i=1+2i$

$4)\left(2+\sqrt{-36}\right),2+3i$

$\left(2+\sqrt{36}i\right)+(2-3i)=(2+6i)+(2-3i)=4+3i$

خواص عمليه الجمع في الاعداد المركبه اطلاع عليهم فهم)

1-الخاصية الابدالية :-

عمليه الجمع ابداليه يعني تكدر تبدل مكان الاعداد مثل هذا C1+C2=C2+C1

2-الخاصية التجميعية:-

عمليه الجمع تجميعية يعني اذا عندك ثلاث اعداد تكدر تجمع الاول والثاني وبعدين ويه الثالث وبالعكس مثل هذا C1+(C2+C3)=(C1+C2)+C3



3-خاصية النظير الجمعي : مهم جداً

النظير الضربي (هو تغير اشاره الجزء الحقيقي والجزء التخيلي) مثال

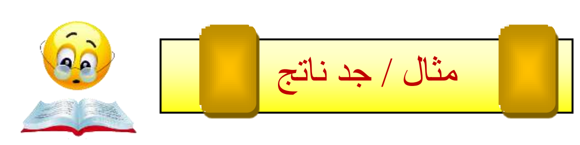
عدد مركب 4+3i نظيره الجمعي 4-3i-

4- خاصية العنصر المحايد الجمعي

الصفر هو العنصر المحايد لان اي عدد تجمعه وياه يبقه نفسه

طرح الاعداد المركبه

الحل:-نحول عمليه الطرح الى عمليه جمع شلون ؟ (ندخل اشاره ال – على القوس الثاني) وراها نجمع



$\mathbf{1)\ (7-13i)-(9+4i)}$
$\mathbf{=(7-13i)+(-9-4i)=-2-17i}$

ضرب الاعداد المركبة

ضرب الاعداد المركبة ضرب توزيعي (الاول * الاول) ±حسب الاشارة (الاول * الثاني)±حسب الاشارة (الثاني * الاول) -+حسب الاشارة (الثاني * الثاني)

س/ جد ناتج ما ياتي

$1)\ (2-3i)(3-5i)=6-10i-9i+15i^2=6-19i-15=-9-19i$

$2)\ (3+4i)^2=9+24i+16i^2=9+24i-16=-7+24i$

$3) i(1+i)=i+i^2=i-1=-1+i$

$4)\ -\frac{5}{2}(4+3i)=-\frac{20}{2}-\frac{15}{2}i=-10-\frac{15}{2}i$

$5)\ (1+i)^2+(1-i)^2$
$=(1+i)(1+i)+(1-i)(1-i)$
$=1+i+i+i^2+1-i-i+i^2$
$=1+i+i-1+1-i-i-1=0$

$6)\ (1-i)^8$
$=[(1-i)^2]^4=(1-2i-1)^2=(-2i)^4=16i^4=16$

ملاحظة :- الاس اذا جان كبير نكدر نجزءه مثل مثال رقم 6 (حسب الخاصيه عند الرفع تضرب الاسس)

(خواص عملية ضرب الاعداد المركبة)

1-الخاصية الابدالية :-

نفس الجمع (الفرق هنا ضرب فلا تخربط بيهم) **C1.C2=C2.C1**

2-الخاصية التجميعية:-

نفس الجمع (الفرق هنا ضرب فلاتخربط بيهم) **C1(C2.C3)=(C1.C2).C3**

3-العنصر المحايد الضربي:-

العنصر المحايد هو 1 لان اي رقم تضربه في الواحد يبقه نفسه

4-النظير الضربي :-مهم جد

النظير الضرب للعدد المركب هو مقلوب العدد يعني تجيب 1 تخليه بالبسط وتخلي العدد بالمقام

وهاي صيغتة $\frac{1}{C}$ بشرط $C \neq 0$

فمثلا ←

← العدد $6+3i$ نظيره الضربي $\frac{1}{6+3i}$

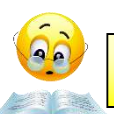
← العدد $4-2i$ نظيره الضربي $\frac{1}{4-2i}$





مرافق العدد المركب

مرافق العدد المركب هو مجرد تغير اشارة الجزء التخيلي يعني اشاره i تغيرها



مثال :-جد مرافق العدد المركب

$5+10i \rightarrow$ مرافقه $\rightarrow 5-10i$

$5i+3 \rightarrow$ مرافقه $\rightarrow -5i+3$

$\frac{2}{\sqrt{5}}i \rightarrow$ مرافقه $\rightarrow -\frac{2}{\sqrt{5}}i$

خواص المرافق

1- المرافق يتوزع على عملية الجمع $\overline{C1+C2}=\overline{C1}+\overline{C2}$

2- مرافق يتوزع على عملية الطرح $\overline{C1-C2}=\overline{C1}-\overline{C2}$

3- المرافق يتوزع على عملية القسمة $\overline{\left(\frac{C1}{C2}\right)}=\frac{\overline{C1}}{\overline{C2}}$

4- جمع اي عدد مركب ويه مرافقة هو ضعف الحقيقي

$$(a+bi)+(a-bi)=2a$$

5-طرح اي عدد مركب من مرافقه = ضعف التخيلي $c-\bar{c}=2bi$

6-مرافق المرافق هوه العدد نفسه

7- ضرب اي عددين مركبين مترافقين (حسب الملاحظة ادناه)

ملاحظه مهمه جدا:- كل عدد مركب تضربه في مرافقه الناتج يكون (الاول تربيع +معامل i تربيع فقط بدون i)

بهاي صيغه

$$(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$$



مثال :- جد ناتج (3+2i).(3-2i)

$$(3+2i).(3-2i)=3^2+2^2=9+4=13$$

استاذ:- أنت اخذت النه مرافق العدد زين شنو نستفاد منه ؟
ج/ علمود نتخلص من كل i بالمقام ليش ؟ دير بالك احنه منريد اي i بالمقام فنتخلص منه حسب الملاحظة ادناه

ملاحظة مهمة جدا:- اذا جان عدنه i بالمقام فنتخلص منه بضـــرب البســـط والمقام في مرافق المقام شوف الامثلة



مثال / ضع كلا مما ياتي بالصورة العادية

$$1)\ \frac{1+i}{1-i} \to \frac{1+i}{1-i} * \frac{1+i}{1+i} = \frac{1+i+i+i^2}{(1+1)} = \frac{1+2i-1}{2} = \frac{2i}{2} = i = 0 + i$$

$$2)\ \frac{2-i}{3+4i} \to \frac{2-i}{3+4i} . \frac{3-4i}{3-4i} = \frac{6-8i-3i+4i^2}{9+16} = \frac{6-11i-4}{25} = \frac{2-11i}{25}$$

$$= \frac{2}{25} - \frac{11}{25} i$$





مثال /اذا كان $C1 = 1 + i \quad C2 = 3 - 2i$ فتحقق من ان

$1 - \overline{C1 + C2} = \overline{C1} + \overline{C2}$

$2 - \overline{C1 - C2} = \overline{C1} - \overline{C2}$

$3 - \overline{C1 . C2} = \overline{C1} . \overline{C2}$

$4 - \overline{\left(\frac{C1}{C2}\right)} = \frac{\overline{C1}}{\overline{C2}}$

ملاحظة مهمة:- اذا جانت هاي العلامة — موجودة فوك عددين مركبين (متصلة) نعوفها ع حالها ونجمع اونطرح او نضرب وبعدين تشيلها وتغير اشارة الجزء التخيلي (يعني مرافق النـاتج هاي اذا جانت متصـــلة يعني فوكهم ثنينهم) اذا جانت منفصـلـة هنا تســوي للعدد مرافقة وتحل عتيادي شوف الحل وتاكد

Sol/

$1 - \overline{C1 + C2} = \overline{C1} + \overline{C2}$

$$\overline{C1 + C2} = \overline{(1 + i) + (3 - 2i)} = \overline{4 - i} = 4 + i$$

$$\overline{C1} + \overline{C2} = \overline{(1 + i)} + \overline{(3 - 2i)} = (1 - i) + (3 + 2i) = 4 + i$$

$$\overline{C1 + C2} = \overline{C1} + \overline{C2}$$



$2-\overline{C1-C2}=\overline{C1}-\overline{C2}$

$\overline{C1-C2}=\overline{(1+i)-(3-2i)}=\overline{(1+i)+(-3+2i)}=\overline{-2+3i}$
$=-2-3i$

$\overline{C1}+\overline{C2}=(\overline{1+i})-(3\overline{-2i)}=(1-i)-(3+2i)$
$=(1-i)+(-3-2i)=-2-3i$
$\overline{C1+C2}=\overline{C1}+\overline{C2}$

$3-\overline{C1.C2}=\overline{C1}.\overline{C2}$
$\overline{C1.C2}=\overline{(1+i).(3-2i)}=\overline{(3-2i+3i+2)}=\overline{(5+i)}=5-i$

$\overline{C1}.\overline{C2}=(\overline{1+i})(\overline{3-2i})=(1-i)(3+2i)=(3+2i-3i+2)$

$=5-i$ ناتج الطرف الايمن

$4-\overline{\left(\frac{C1}{C2}\right)}=\frac{\overline{C1}}{\overline{C2}}$

$\overline{\left(\frac{C1}{C2}\right)}=\overline{\left(\frac{1+i}{3-2i}\right)}=\overline{\left(\frac{1+i}{3-2i}.\frac{3+2i}{3+2i}\right)}=\overline{\left(\frac{3+2i+3i-2}{9+4}\right)}=\overline{\left(\frac{1+5i}{13}\right)}$

$=\overline{\left(\frac{1}{13}+\frac{5}{13}i\right)}=\frac{1}{13}-\frac{5}{13}i$

$\frac{\overline{C1}}{\overline{C2}}=\frac{\overline{(1+i)}}{\overline{(3-2i)}}=\frac{1-i}{3+2i}$

$\frac{1-i}{3+i}.\frac{3-2i}{3-2i}=\frac{3-2i-3i-2}{9+4}=\frac{1-5i}{13}=\frac{1}{13}-\frac{5}{13}i$



مثال/جد النظير الضربي للعدد C=3-4i وضعه بالصيغة العادية للعدد المركب.

Sol

النظير الضربي للعدد c هو $\frac{1}{c}$:.

$\because \frac{1}{c}=\frac{1}{3-4i}\to\frac{1}{3-4i}.\frac{3+4i}{3+4i}=\frac{3+4i}{9+16}=\frac{3+4i}{25}=\frac{3}{25}+\frac{4}{25}i$

مثال واجب :-جد النظير الضربي للعدد c=3-7i؟

مثال واجب :-اذا كان c=2-i فاوجد c^2-2z^2؟

مثال //اثبت ان $\frac{3+2i}{2-5i}+\frac{3-2i}{2+5i}=\frac{-8}{29}$



ملاحظه/ كل سؤال اثبت ان لازم يطلع الناتج مال الطرفين متساوي

$$\frac{3+2i}{2-5i}+\frac{3-2i}{2+5i}$$

$$\left(\frac{3+2i}{2-5i}\cdot\frac{2+5i}{2+5i}\right)+\left(\frac{3-2i}{2+5i}\cdot\frac{2-5i}{2-5i}\right)$$

$$=\frac{6+15i+4i-10}{4+25}+\frac{6-15i-4i-10}{4+25}$$

$$=\frac{-4+19i}{29}+\frac{-4-19i}{29}=\frac{-4+19i-4-19i}{29}=-\frac{8}{29}$$

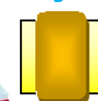
(تساوي عددين مركبين او ايجاد قيم X,Y الحقيقية)

التساوي معناه نساوي الجزء الحقيقي ويه الحقيقي والتخيلي مع التخيلي بدون ا

ملاحظه:- منكدر نشتغل اذا مو الطرفين عدد مركب بصيغة عادية

زين استاذ شنو نستفاد؟ نستفاد منه ايجاد قيمة x,y





مثال// جد قيمه y,x الحقيقين اذا علمت ان

$$1)\ \ (x+yi)(3-2i)-(1-2i)=4+3i$$

$$\therefore (x+yi)(3-2i)=(4+3i)+(1-2i)$$

$$(x+yi)(3-2i)=(5+i)$$

$$\therefore x+yi=\frac{5+i}{3-2i}*\frac{3+2i}{3+2i}$$

$$x+yi=\frac{15+10i+3i-2}{9+4}\rightarrow x+yi=\frac{13+13i}{13}$$

$$x+yi=\frac{13}{13}+\frac{13}{13}i\rightarrow x+yi=1+i$$

$$x=1\quad ,y=1$$

ملاحظه:- بهيج اسئله
نبسط الطرف الايسر قبل
لا نساوي العددين



2) $(3x+2yi)^2 = \frac{200}{4+3i}$

$$(9x^2+12xyi+4y^2i^2) = \left(\frac{200}{4+3i} * \frac{4-3i}{4-3i}\right)$$

$$9x^2+12xyi-4y^2 = \frac{800-600}{25}$$

$$9x^2+12xyi-4y^2 = \frac{800}{25} - \frac{600}{25}i$$

$$9x^2+12xyi-4y^2 = 32-24i$$

$$9x^2-4y^2 = 32 \ldots\ldots\ldots..1$$

$[12xy = -24 \rightarrow xy = -2 \rightarrow x = \frac{-2}{y} \ldots\ldots\ldots 2$ (نعوض 2 في 1)

$$9\left(\frac{-2}{y^2}\right) - 4y^2 = 32 \rightarrow \left[\frac{36}{y^2} - 4y^2 = 32\right] * y^2$$

$$36-4y^4 = 32y^2 \rightarrow 4y^4+32y^2-36 = 0] \div 4$$

$y^2+8y^2-9 = 0 \rightarrow (y^2+9)(y^2-1) = 0$ تهمل

$$or\ y^2-1 = 0 \rightarrow y^2 = 1 \rightarrow y = \mp 1$$

$$if y = 1 \rightarrow x = \frac{-2}{1} \rightarrow x = -2$$

$$if y = -1 \rightarrow x = \frac{-2}{-1} = 2$$

ملاحظه/ من نلكي مجموع مربعين بايجاد قيمة x,y يهمل لان معدنه هيج قانون

3) $(x+yi)^2(1+2i) = 11+2i$

sol

$$(x+yi)^2 = \frac{11+2i}{1+2i} \rightarrow x^2+2xyi+y^2i^2 = \frac{11+2i}{1+2i}$$

$$x^2-y^2+2xyi = \frac{11+2i}{1+2i} * \frac{1-2i}{1-2i}$$

ملاحظه:-من نلكي (x,y) بقوس واحد نخليهم بجهه وحده ونحول باقي الاقواس بالجهه الثانيه وراها نبسط

$$x^2-y^2+2xyi = \frac{11-22i+2i-4i^2}{1+4}$$

$$x^2-y^2+2xyi = \frac{11-20i+4}{5} \rightarrow x^2-y^2+2xyi = \frac{15-20i}{5}$$

$$x^2-y^2+2xyi = \frac{15}{5} - \frac{20}{5}i$$

$x^2-y^2+2xyi = 3-4i$ من التساوي

$x^2 - y^2 = 3 \ldots\ldots\ldots 1$

$2xy = -4\ ] \div 2 \rightarrow xy = -2 \rightarrow x = \frac{(-2)}{y} \ldots\ldots..2$

$\left(\frac{-2}{y}\right)^2 - y^2 = 3$ نعوض 2 في 1 $\rightarrow \frac{4}{y^2} - y^2 = 3(y^2$ نضرب في $)$

$4 - y^4 = 3y^2 \rightarrow y^4 + 3y^2 - 4 = 0$

$(y^2 + 4)(y^2 - 1) = 0$

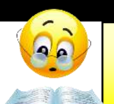
$if\, y^2 + 4 = 0 \rightarrow y^2 = -4$ تهمل

$or\, y^2 - 1 = 0 \rightarrow y^2 = 1 \rightarrow y = \mp 1$

$when\ y = 1 \rightarrow x = \frac{-2}{1} \rightarrow x = -2$

$when\ y = -1 \rightarrow x = \frac{-2}{-1} \rightarrow x = 2$

ملاحظة مهمة جدا :- من يكلك العددين مترافقين مباشـــرا قبل الحل تســـوي مرافق لاحد الكسرين او العددين بعدها نحل



مثال/ اذا كان $\frac{3-2i}{i}$, $\frac{x-yi}{1+5i}$ مترافقان جد قيمة كل من $x,y \in R$

$\frac{3-2i}{i} = \overline{\left(\frac{x-yi}{1+5i}\right)} \rightarrow \frac{3-2i}{i} = \frac{x+yi}{1-5i}$

$(x+yi).i = (3-2i)(1-5i)$

$(x+yi)i = 3 - 15i - 2i + 10^2$

$(x+yi)i = -7 - 17i \rightarrow (x+yi) = \frac{-7-17i}{i}$

$(x+yi) = \frac{-7-17i}{i} * \frac{-i}{-i} \rightarrow (x+yi) = \frac{+7i+17i^2}{1}$

$x + yi = -17 + 7i$ من التساوي

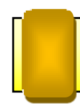
$x = -17 \quad y = 7$

مثال :-واجب:-اذا كان $\frac{3-i}{1-i}$, $\frac{2x-yi}{1+2i}$ مترافقان فاوجد $x, y \in R$ ج\ x=2 y=-3

حل السوال ورسله النه عبر التلكرام @Math_Hamza



مثال / جد قيم x,y الحقيقية لكل مما ياتي

1) $(2x+i)(y-2i)=-2-9i$

sol

$2xy-4xi+yi-2i^2=-2-9i$

$2xy-4xi+yi-2=-2-9i$

$2xy+2=-2 \to 2xy=-2-2$

$2xy=-4] \div 2 \to xy=-2 \to x=\frac{(-2)}{y}$ ……… 1

$-4x+y=-9$ ……… 2   نعوض 1 في2

$-\frac{4(-2)}{y}+y=-9].y$ نضرب فيy

$8+y^2=-9y \to y^2+9y+8=0$

$(y+8)(y+1)=0$

$if\, y=-8 \to x=\frac{-2}{-8} \to x=\frac{1}{4}$

$or\; y=-1 \to x=\frac{-2}{-1} \to x=2$

$2-x(x+i)+y(y-i)+i=13$

$x^2+xi+y^2-yi+i=13$

$x^2+y^2+(x-y+1)i=13$

$x^2+y^2=13$ ……… 1

$x-y+1=0 \to x=y-1$ نعوض 2 في1 .:

$(y-1)^2+y^2=13 \to y^2-2y+1+y^2=13$

$2y^2-2y+1-13=0 \to 2y^2-2y-12=0] \div 2$

$y^2-y-6=0$

$(y-3)(y+2)=0$

اما $y-3=0 \to y=3 \to :.x=3-1 \to x=2$

او $y+2=0 \to y=-2 \to :.x=-2-1 \to x=-3$

التحليل الى عاملين :- نستخدمه اذا جان عدنه حدين مربعين بينهم جمع منكدر نحللهم نستخدمه باضافة $-i^2$ للحد الثاني علمود نكدر نحلل فرق بين مرعين

a^2+b^2 (نلكي هذا) $\rightarrow a^2-b^2i^2$ من تضيف هيج يصير $\rightarrow (a-bi)(a+bi)$

$1)x^2+16=x^2-16i^2=(x-4i)(x+4i)$

$2)(4y^2+9)=4y^2-9i^2=(2y-3i)(2y+3i)$

ملاحظة:- من ينطي فقط عدد ويكلك حلل (هذه العدد نجزءه الى عددين الهم جذر تربيعي علمود نكدر نطبق خاصية التحليل)

مثال

$1)\ 10=9+1 \quad =9-1i^2=(3-i)(3+i)$

$2)\frac{74}{9}=\frac{25+49}{9}=\frac{25}{9}-\frac{49}{9}i^2=(\frac{5}{3}-\frac{7}{3}i)(\frac{5}{3}+\frac{7}{3}i)$

ملاحظة: من تشوف البسط اجذر العدد الاول والثاني اذا طلع يشبه المقام فبالتاكيد هناك تحليل بس ينقصه شي مثل *i* شلون نضيفه اصعد فوك وشوف مثل هذا المثال:-



مثال / اذا كان $\frac{9y^2+49}{3y+7i}=(2+xi)(-x+i)$ فجد قيمة y,x الحقيقية .

$$-2x+2i-x^2i+xi^2=\frac{9y^2-49i^2}{3y+7i}$$

$$-2x+2i-x^2i-x=\left(\frac{(3y-7i)\cancel{(3y+7i)}}{\cancel{3y+7i}}\right)$$

$-3x+(2-x^2)i=3y-7i$

$-3x=3y\rightarrow -x=y$

$2-x^2=-7\rightarrow x^2=9\rightarrow x=\mp 3$

$when\ x=3\rightarrow -3=y\rightarrow \therefore y=-3$

$when x=-3\rightarrow -(-3)=y\rightarrow \therefore y=3$

حسب الملاحظه :-

$\frac{9y^2+49}{3y+7i}$

$9\rightarrow$ جذره $\rightarrow 3$

$49\rightarrow$ جذره $\rightarrow 7$

معناه اكو تحليل بالبسط وختصار مع المقام



ملاحظه:-اذا جان عدنه مجموع مكعبين او فرق بين مكعبين مع وجود i بواحد من الحدود نبدل العمليه (من جمع الى طرح وبالعكس)و i نسويها i^3 وراها نحلل

$1)2x^3 - 16i = 2(x^3 - 8i) = 2(x^3 + 8i^3) = 2(x + 2i)(x^2 - 2xi - 4)$
$2)y^3 i - 1 = y^3 i - i^4 = i(y^3 - i^3) = i(y - i)(y^2 + yi + i^2)$

ملاحظه:-مرات اكو حدوديات ثلاثيه وبيها i بالحد الوسط نبدل اشاره الحد الاخير ونضربه ب i^2 وراها نحلل

$1)y^2 + 4yi + 5 = y^2 + 4yi - 5i^2 = (y + 5i)(y - i)$
$2)3x^2 - 7xi - 4 = 3x^2 - 7xi + 4i^2 = (3x - 4i)(x - i)$

مثال:-حلل الى عدة عوامل في c

$1)x^4 - 16 = (x^2 - 4)(x^2 + 4) = (x^2 - 4)(x^2 - 4i^2)$
$= (x - 2)(x + 2)(x - 2i)(x + 2i)$
$2)z^4 + 10z^2 + 9 = (z^2 + 9)(z^2 + 1)$
$= (z^2 - 9i^2)(z^2 - i^2) = (z - 3i)(z + 3i)(z - i)(z + i)$

مثال :-اوجد قيم x,y الحقيقيه

$1)\frac{x^2 + y^2}{x + yi} = 3 + 2i$

$\frac{x^2 - y^2 i^2}{x - yi} = 3 + 2i \rightarrow \frac{(x - yi)(x + yi)}{x + yi} = 3 + 2i$

$x - yi = 3 + 2i \rightarrow x = 3 , y = -2$

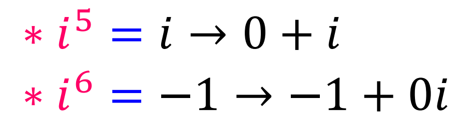
مثال واجب:- اوجد قيمة x,y الحقيقيه في كل ممايأتي

$1)\frac{x^2 + 3xi + 10}{x - 2i} = -4 - 2yi$

$2)\frac{2x^2 + xi + 15}{2x - 5i} = -3 + yi$

تمارين (1-1)





$* \; i^5 = i \to 0 + i$

$* \; i^6 = -1 \to -1 + 0i$

$* \; i^{124} = 1 \to 1 + 0i$

$* \; i^{999} = -i \to 0 - i$

$* \; i^{4n+1} = i \to 0 + i$

$* \; (2 + 3i)^2 + (12 + 2i) = (4 + 12i - 9) + (12 + 2i)$

$= 7 + 14i$

$* \; (10 + 3i)6i = 60i + 18i^2 = -18 + 60i$

$* \; (1 + i)^4 - (1 - i)^4 = [(1 + i)^2]^2 - [(1 - i)^2]^2$

$= (1 + 2i - 1)^2 - (1 - 2i - 1)^2 = (2i)^2 - (-2i)^2$

$= 4i^2 - 4i^2$

$= -4 + 4 = 0$

$$* \; \frac{12 + i}{i} = \frac{12 + i}{i} \cdot \frac{-i}{-i} = \frac{-12i - i^2}{1} = 1 - 12i$$

$$* \; \frac{3 + 4i}{3 - 4i} \cdot \frac{3 + 4i}{3 + 4i} = \frac{9 + 12i + 12i + 16i^2}{9 + 16}$$

$$= \frac{9 + 24i - 16}{25} = \frac{-7 + 24i}{25} = -\frac{7}{25} + \frac{24}{7}i$$

$$* \; \frac{i}{2 + 3i} \cdot \frac{2 - 3i}{2 - 3i} = \frac{2i - 3i^2}{4 + 9} = \frac{3 + 2i}{13} = \frac{3}{13} + \frac{2}{13}i$$

$$* \; \left(\frac{3 + i}{1 + i}\right)^3 = \left(\frac{3 + i}{1 + i} \cdot \frac{1 - i}{1 - i}\right)^3 = \left(\frac{3 - 3i + i - i^2}{1 + 1}\right)^3$$

$$\left(\frac{3 - 2i + 1}{2}\right)^3 = \left(\frac{4 - 2i}{2}\right)^3 = \left(\frac{4}{2} - \frac{2}{2}i\right)^3 = (2 - i)^3$$

$= (2 - i)^2(2 - i) = (4 - 4i + i^2)(2 - i)$

$= (4 - 4i - 1)(2 - i)$

$= (3 - 4i)(2 - i) = 6 - 3i - 8i + 4i^2 = 6 - 11i - 4$



$= 2 - 11i$

$* \frac{2+3i}{1-i} \cdot \frac{1+4i}{4+i} = \frac{2+8i+3i+12i^2}{4+i-4i-i^2}$

$= \frac{2+11i-12}{4-3i+1} = \frac{-10+11i}{5-3i} * \frac{5+3i}{5+3i} = \frac{-50+30i+55i+33i^2}{25+9}$

$= \frac{-50+25i-33}{34} = \frac{-83+25i}{34} = -\frac{83}{34} + \frac{25}{34}i$

$* (1+i)^3 + (1-i)^3 = (1+i)^2(1+i) + (1-i)^2(1-i)$

$(1+2i-1)^2(1+i) + (1-2i-1)^2(1-i)$

$= (2i)^2(1+i) + (-2i)^2(1-i) = 4i^2(1+i) + 4i^2(1-i)$

$= -4(1+i) - 4(1-i) = -4 - 4i - 4 + 4i = -8$

س2/جد قيمة كل من x,y الحقيقين اللتين تحققان المعادلات التالية

$a)\ y + 5i = (2x+i)(x+2i)$

sol

$2x^2 + 4xi + xi + 2i^2 = y + 5i$ نساوي

$2x^2 + 5xi - 2 = y + 5i \rightarrow y = 2x^2 - 2\ \dots\dots\dots\dots 1$

$5x = 5 \rightarrow x = 1$

$y = 2(1)^2 - 2 \rightarrow \therefore y = 0$ (1)نعوض قيمة x في معادلة رقم :.

$b)\ 8i = (x+2i)(y+2i) + 1$

$8i = xy + 2xi + 2yi + 4i^2 + 1$

$8i = xy + 2xi + 2yi - 4 + 1$

$8i = xy + 2xi + 2yi - 3$ نساوي

$xy - 3 = 0 \rightarrow xy = 3\ \dots\dots\dots 1$

$[2x + 2y = 8] \div 2$

$x + y = 4 \rightarrow x = 4 - y\ \dots\dots\dots 2$

$(4-y)y = 3 \rightarrow 4y - y^2 = 3 \rightarrow y^2 - 4y + 3 = 0$ (1)نعوض 2 في

$(y-3)(y-1) = 0$

اما $y - 3 = 0 \rightarrow y = 3 \rightarrow x = 3 - 3 \rightarrow x = 1$

او $y - 1 = 0 \rightarrow y = 1 \rightarrow x = 4 - 1 \rightarrow x = 3$

$C)\ \dfrac{1-i}{1+i}+(x+yi)=(1+2i)^2$

$(x+yi)=(1+2i)^2-\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)$

$(x+yi)=1+4i+4i^2-\left(\dfrac{1-i}{1+i}\cdot\dfrac{1-i}{1-i}\right)$

$(x+yi)=1+4i-4-\dfrac{1-i-i+i^2}{1+1}$

$(x+yi)=1+4i-4-\dfrac{1-2i-1}{2}$

$(x+yi)=-3+4i-\dfrac{-2i}{2}$

$(x+yi)=-3+4i+i\rightarrow(x+yi)=-3+5i$

$x=-3\qquad y=5$

$d)\ \dfrac{2-i}{1+i}x+\dfrac{3-i}{2+i}y=\dfrac{1}{i}$

$\left(\dfrac{2-i}{1+i}*\dfrac{1-i}{1-i}\right)x+\left(\dfrac{6-3i-2i+i^2}{4+1}\right)y=\dfrac{1}{i}*\dfrac{-i}{-i}$

$\left(\dfrac{2-2i-i+i^2}{1+1}\right)x+\left(\dfrac{6-3i-2i+i^2}{4+1}\right)y=-i$

$\left(\dfrac{2-3i-1}{2}\right)x+\left(\dfrac{6-5i-1}{5}\right)y=-i$

$\left(\dfrac{1-3i}{2}\right)x+\left(\dfrac{5-5i}{5}\right)y=-i$

$\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}i\right)x+\left(\dfrac{5}{5}-\dfrac{5}{5}i\right)y=-i$

$\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}i\right)x+(1-i)y=-i$

$\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{2}ix+y+yi=-i$ (نساوي)



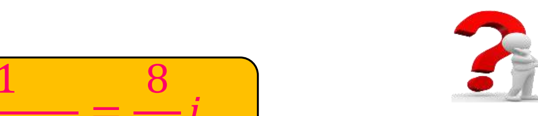
$$\frac{1}{2}x + y = 0 \ldots\ldots\ldots 1$$

$$\frac{-3}{2}x - y = -1 \ldots\ldots\ldots 2$$

$-x = -1 \rightarrow -x = -1 \rightarrow x = 1$ نعوض قيمة x في معادله (1)

$$\frac{1}{2}(1) + y = 0 \rightarrow \frac{1}{2} + y = 0 \rightarrow y = -\frac{1}{2}$$

س3\ اثبت ان



$$a)\ \frac{1}{(2-i)^2} - \frac{1}{(2+i)^2} = \frac{8}{25}i$$

$$\frac{1}{(2-i)^2} - \frac{1}{(2+i)^2} = \frac{1}{4-4i+i^2} - \frac{1}{4+4i+i^2}$$

$$= \frac{1}{4-4i-1} - \frac{1}{4+4i-1} = \left(\frac{1}{3-4i}\right) - \frac{1}{3+4i}$$

$$= \left(\frac{1}{3-4i} * \frac{3+4i}{3+4i}\right) - \left(\frac{1}{3+4i} * \frac{3-4i}{3-4i}\right) = \frac{3+4i}{9+16} - \frac{3-4i}{9+16}$$

$$\frac{3+4i}{25} - \frac{3-4i}{25} = \left(\frac{3+4i-3+4i}{25}\right) = \frac{8i}{25} = R.H.S$$

$$b)\ \frac{(1-i)^2}{1+i} + \frac{(1+i)^2}{(1-i)} = -2$$

$$\frac{(1-i)^2}{1+i} + \frac{(1+i)^2}{(1-i)} = \frac{(1-2i+i^2)}{1+i} + \frac{(1+2i+i^2)}{(1-i)}$$

$$\frac{1-2i-1}{1+i} + \frac{1+2i-1}{(1-i)} = \frac{-2i}{1+i} + \frac{2i}{(1-i)}$$

$$= \frac{-2i(1-i) + 2i(1+i)}{((1+i)(1-i))}$$

$\dfrac{-2i + 2i^2 + 2i + 2i^2}{1+1} = \dfrac{-2-2}{2} = \dfrac{-4}{2} = -2$ الطرف الايمن

ناخذ الطرف الايسر $C)(1-i)(1-i^2)(1-i^3)=4$

$$(1-i)(1-i^2)(1-i^3)=(1-\mathrm{i})(1+1)(1+\mathrm{i})$$
$$=(1-i)(1+i)(2)$$

=(2)(2)=4=R.H.S وه م



س4/ حلل كلا من الاعداد [125,41,85,29] الى حاصل ضرب عاملين من الصوره a+bi حيث a,b عددان نسبيان

85 → $81+4=81-4i^2=(9-2\mathrm{i})(9+2\mathrm{i})$

41 → $36+5=36-5i^2=(6-\sqrt{5}i)(6+\sqrt{5}i)$

$29=4+25=4-25i^2=(2-5i)(2+5i)$

$125=121+4=121-4i^2=(11-2i)(11+2i)$



س5/جد قيمة X,Y الحقيقيتين اذا علمت ان $\frac{6}{x+yi}$, $\frac{3+i}{2-i}$ مترافقان

$$\because \frac{6}{x+yi}=\frac{3-i}{2+i}$$
$$(x+yi)(3-i)=6(2+i)$$
$$(x+yi)(3-i)=12+6i\rightarrow(x+yi)=\frac{12+6i}{3-i}$$
$$(x+yi)=\frac{12+6i}{3-i}*\frac{3+i}{3+i}\rightarrow(x+yi)=\frac{36+12i+18i+6i^2}{9+1}$$
$$x+yi=\frac{36+30i-6}{10}\rightarrow x+yi=\frac{30+30i}{10}\rightarrow x+yi=\frac{30}{10}+\frac{30}{10}i$$

$=x+yi=3+3i$ نساوي $\quad x=3 \quad y=3$



الجذران التربيعيان للعدد المركب

بيه حالتين

اولا:-اذا جان عدنه عدد حقيقي بس مبيه تخيلي نطلع اله الجذور مباشرة عن طريق

- اما نفرض العدد=z^2 ونجذر الطرفين
- او العدد=z^2 بعدها ننقل العدد يم z^2 وناسويهم بال0 وراها نحلل

مثال:-اوجد الجذور التربيعيه للاعداد التالية

$1)\ -49$

$z^2 = -49$

$z = \mp\sqrt{-49} = \mp 7i$

$2)\ -13$

$z^2 = -13$

$= z^2 + 13 \rightarrow z^2 - 13i^2 = 0 \rightarrow (z - \sqrt{13}i)(z + \sqrt{13}i)$

ثانيا :-اذا نريد نطلع الجذرين سواء جان عدد مركب كامل او بس جزء تخيلي نتبع هل خطوات بس وما بيها كل صعوبة

1- نجيب العدد نحطه جوه الجذر التربيعي ونساوي ويه x+yi يعني بهل صيغه

$\sqrt{a + bi} = x + yi$

2- نربع الطرفين

$(a + bi) = (x + yi)^2$

3- نساوي الحقيقي مع الحقيقي والتخيلي مع التخيلي بعد منفتح الطرف الايمن مربع حدانية

$a + bi = (x^2 - y^2) + 2xyi$

$a = x^2 - y^2$ هاي المعادله الاولى

$b = 2xy$ هاي المعادلة الثانية

هاي الخطوات ثابتة افهمهم زين



مثال / جد الجذران التربيعيان للاعداد المركبة

c=8+6i

$\sqrt{a + bi} = x + yi$

$8 + 6i = (x - yi)^2$

$8 + 6i = (x^2 - y^2) + 2xyi$

$x^2 - y^2 = 8 \ldots\ldots\ldots 1$

$2xy = 6 \rightarrow x = \frac{6}{2y} \rightarrow x = \frac{3}{y} \ldots\ldots\ldots 2$

نعوض معادلة 2 في معادلة 1

$\left(\frac{3}{y}\right)^2 - y^2 = 8 \rightarrow \left[\frac{9}{y^2} - y^2 = 8\right] . y^2$ نضرب المعادلة ب

$9 - y^4 = 8y^2 \rightarrow y^4 + 8y^2 - 9 = 0$

$(y^2 + 9)(y^2 - 1) = 0$

اما $y^2 + 9 = 0$ تهمل

$y = \mp 1 \rightarrow if\, y = 1 \rightarrow x = \frac{3}{1} = 3 \quad (3 + i)$

$if\ y = -1 \rightarrow x = \frac{3}{-1} \rightarrow x = -3 \quad (-3 - i)$





$2)8i$

$\sqrt{8i} = x + yi$

$8i = (x + yi)^2$

$8i = (x^2 - y^2) + 2xyi$

$x^2 - y^2 = 0 \dots\dots\dots 1$

$2xy = 8 \rightarrow xy = 4 \rightarrow x = \frac{4}{y} \dots\dots\dots 2$

نعوض 2في 1

$\left(\frac{4}{y}\right)^2 - y^2 = 0 \rightarrow \left[\frac{16}{y^2} - y^2 = 0\right] . y^2$ نضرب في

$16 - y^4 = 0 \rightarrow (4 - y^2)(4 + y^2) = 0$

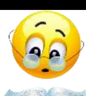
اما $4 + y^2 = 0$ يهمل

او $4 - y^2 = 0 \rightarrow y^2 = 4 \rightarrow y = \mp 2$

$when\ y = 2 \rightarrow x = \frac{4}{x} \rightarrow x = \frac{4}{2} \rightarrow x = 2 \quad (2 + 2i)$

$when\ y = -2 \rightarrow x = \frac{4}{x} \rightarrow x = \frac{4}{-2} \rightarrow x = -2 \quad (-2 - 2i)$

ملاحظة :- ما يصير نطلع الجذر التربيعي للعدد المركب اله وهوه بالصيغة العادية a+bi



مثال / جد الجذر التربيعي للعدد $\frac{14+2i}{1+i}$

$\frac{14 + 2i}{1 + i} . \frac{1 - i}{1 - i} = \frac{14 - 4i + 2i - 2i^2}{1 + 1} = \frac{14 - 12i + 2}{2}$

$= \frac{(16 - 12i)}{2}$

$\frac{16}{2} - \frac{12}{2} i = 8 - 6i$

نفس المثال الاول فقط تغير الاشارة الوسط

واجبات :-اوجد الجذر التربيعي للاعداد الاتيه

1) 3+4i　　2)7-24i　　3)6i

مثال:-اذا كان $z=\frac{7-4i}{2+i}$ حيث z=a+bi فاوجد الجذور التربيعيه للمقدار 2a-bi

الحل :-

$$a+bi=\frac{7-4i}{2+i}\cdot\frac{(2-i)}{2-i}=\frac{14-7i-8i+4i^2}{5}=\frac{10-15i}{5}=2-3i$$

$$\therefore a=2\ ,b=-3$$

$$z=2a-bi\rightarrow(2*2)-(-3i)=4+3i$$

$$\sqrt{4+3i}=x+yi$$

$$x^2-y^2+2xyi=4+3i$$

$$x^2-y^2=4\ \dots\dots 1$$

$2xy=3\ \rightarrow y=\frac{3}{2x}$ نعوض بالمعادله 1

$$\left[x^2-\frac{9}{4x^2}=4\right]*4x^2$$

$$4x^4-16x^2-9=0\rightarrow(2x^2-9)(2x^2+1)=0$$

$$2x^2=9\rightarrow x^2=\frac{9}{2}\rightarrow x=\mp\frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$either\ x=\frac{3}{\sqrt{2}}\rightarrow y=\frac{3}{2\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$or\ x=-\frac{3}{\sqrt{2}}\rightarrow y=\frac{3}{2\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

الجذرين هما $\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\ ,-\frac{3}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i$



حل المعادلات التربيعية في c

حل المعادلة ب 3 طرق وهي (لو نستخدم التحليل الى عاملين من نلكي مجموع مربعين او نحلل بالتجربة او نحلل بالدستور)

قانون الدستور $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

معامل $a \to x^2$

معامل $b \to x$

الحد الخالي من $c \to x$

ملاحظه:-كل المعادلات نكدر نحلها بالدستور

ملاحظة:- شوكت نحل بالتجربة وشوكت بالدستور شوف مرات عدنة معادلة ثلاث حدود نحاول وياها بالتجربة متنحل مادام منحلت نروح لقانون الدستور



مثال:-حل المعادلات التاليه في c

متنحل بالتجربة $1 - x^2 + 4x + 5 = 0$

a=1 , b=4 , c=5

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \to x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(1)(5)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} \to x = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2} \to x = \frac{-4 \mp 2i}{2}$$

$$x = -2 \mp i$$

$$\therefore x = -2 + i \quad or \quad x = -2 - i$$

$2 - x^2 - 5ix = 6$

$$x^2 - 5xi - 6 = 0$$

$$a = 1 \quad . b = -5i \quad . c = -6$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \to x = \frac{5i \pm \sqrt{(-5i)^2 - 4(1)(-6)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{5i \pm \sqrt{25i^2 + 24}}{2} \rightarrow x = \frac{5i \pm \sqrt{-25 + 24}}{2}$$

$$x = \frac{5i \pm \sqrt{-1}}{2} = \frac{5i \mp i}{2}$$

$\therefore$ اما $x = \frac{5i + i}{2} = \frac{6i}{2} = 3i$

او $x = \frac{5i - i}{2} = \frac{4i}{2} = 2i$ $\qquad \therefore s = [3i \ , 2i]$



مثال حل المعادلة $z^4 + 13z^2 + 36 = 0$

$(z^2 + 9)(z^2 + 4) = 0$

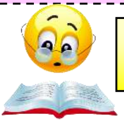
$if \ \ z^2 + 9 = 0 \rightarrow z^2 = -9$

$\therefore \ z = \mp\sqrt{-9} \rightarrow \mp\sqrt{9}i \quad ; . z = \mp 3i$

$or \ z^2 + 4 = 0 \rightarrow z^2 = -4 \rightarrow z = \mp\sqrt{-4} \rightarrow z = \mp\sqrt{4}i = \mp 2i$

$\therefore s = [\mp 3i . \mp 2i]$

مثال :-مهم جدا وكذلك الفكرة مهمة جدا (هي تحل بالدســـتور لكن يظهر لنا جذر لا يمكن الحل فنستخدم (ايجاد الجذر التربيعي)



حل المعادلة التالية $z^2 - 3z + 1 + 3i$

ملاحظه:- اي عدد خالي من متغير هو يمثل قيمه c

$a = 1 \quad b = -3 \quad , c = 1 + 3i$

$$z = \frac{3 \mp \sqrt{9 - 4(1)(1 + 3i)}}{2} \rightarrow z = \frac{3 \mp \sqrt{5 - 12i}}{2}$$

هنا منكدر نكمل الحل لان طلع النه جذر الحل شلون (ناخذ الجذر ونستخدم ايجاد الجذر التربيعي)

$x + yi = \sqrt{5 - 12i}$

تكمله الحل واجب حاول تحله ورسله لنا عبر التلكرام @Math_Hamza



مثال:-اوجد مجموعه الحل للمعادله الاتيه $x^2 + 2x + 1 - 8i = 0$

$a = 1 \quad ,b = 2 \quad ,c = 1 - 8i$

$$x = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \mp \sqrt{2^2 - 4(1)(1 - 8i)}}{2(1)}$$

$$= \frac{-2 \mp \sqrt{4 - 4 + 32i}}{2} = \frac{-2 \mp 4\sqrt{2i}}{2}$$

هنا نتوقف لان طلع عدنه **i** تحت الجذر لذالك نحله بالفرضيه

$x + yi = \sqrt{2i}$

$(x^2 - y^2) + 2xyi = 2i$

$x^2 - y^2 = 0 \ldots \ldots 1$

$2xy = 2 \rightarrow y = \frac{1}{x} \ldots .2 \; in \; 1$

$\left[x^2 - \frac{1}{x^2} = 0\right] * x^2 \rightarrow x^4 - 1 = 0 \rightarrow (x^2 - 1)(x^2 + 1) = 0$

$x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = \mp 1 \; ,b = \mp 1$

$\therefore \sqrt{2i} = 1 + i \quad or \; \sqrt{2i} = -1 - i$

$$x = \frac{-2 + 4(1 + i)}{2} = \frac{-2 + 4 + 4i}{2} = \frac{2 + 4i}{2} = 1 + 2i$$

$$or \; x = \frac{-2 - 4(1 + i)}{2} = \frac{-2 - 4 - 4i}{2} = \frac{-6 - 4i}{2} = -3 - 2i$$

$s = \{1 + 2i \, , -3 - 2i\}$

مثال :- اوجد مجموعه الحل لكل من المعادلات الاتيه

1) $x^2 + 27 = 0$

$x^2 - 27i^2 = 0 \rightarrow (x - 3\sqrt{3}i)(x + 3\sqrt{3}i)$

$either \; x = 3\sqrt{3}i \quad or \quad x = -3\sqrt{3}i$

$s = \{3\sqrt{3}i \quad , -3\sqrt{3}i\}$

2) $5x^2 + 6xi + 8 = 0$

$5x^2 + 6xi - 8i^2 = 0$

$(5x - 4i)(x + 2i) = 0$

$$5x = 4i \rightarrow x = \frac{4}{5}i \;, x = -2i$$

$$s = \left\{\frac{4}{5}i, -2i\right\}$$

واجب : - اوجد مجموعه الحل لكل من المعادلات الاتيه

1) $x^2 - 4xi + 11 = 0$

2) $4x^2 - 7xi + 5 = 0$

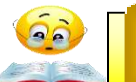
أيجاد المعادلة التربيعية اذا علم جذراها

ينطي النه جذرين مجرد مطلوب منك (تجمع الجذرين)(وتضرب الجذرين) وتنزلهم بهاي المعادله

$$[x^2 - (\text{مجموع الجذرين})x + \text{حاصل ضرب الجذرين} = 0]$$

ملاحظة مهمة جدا :- اذا كال بالسـؤال (مترافقان) او ذكر معاملات حقيقية او $\in R$ معنا الجذر الثاني هو مرافق الجذر الاول ويذكر ذني العبارات من ينطي فقط جذر واحد)

ملاحظه:-اذا جان الجذران مترافقان الناتج يكون حقيقي يعني رقم مابيه i



مثال / جد المعادلة التي جذراها $\mp(2+2i)$

$(2+2i), (2-2i)$

$(2+2i)+(2-2i) = 0$ مجموع الجذرين

$(2+2i)(2-2i) = -4-4i-4i-4i^2 = -4-8i+4$ حاصل ضرب الجذرين

$= -8i$

$x^2 - (0)x - 8i = x^2 - 8i = 0$



مثال/ كون المعادلة التربيعية التي معاملاتها حقيقية واحد جذريها(3-4i)

$(3+4i)+(3-4i) = 6$ مجموع الجذرين

$(3+4i)(3-4i) = 9+16 = 25$ حاصل ضرب الجذرين

$x^2 - 6x + 25 = 0$ المعادلة التربيعية





مثال / كون المعادلة التربيعية التي معاملاتها حقيقية واحد جذريها $\frac{4i}{i-3}$

$$\frac{4i}{-3+i}\cdot\frac{-3-i}{-3-i}=\frac{-12i-4i^2}{9+1}=\frac{4-12i}{10}=\frac{4}{10}-\frac{12}{10}i$$

$=\frac{2}{5}-\frac{6}{5}i$ جذر الاول

$\frac{2}{5}+\frac{6}{5}i$ الجذر الثاني

$\left(\frac{2}{5}+\frac{6}{5}i\right)+\left(\frac{2}{5}-\frac{6}{5}i\right)=\frac{4}{5}$ مجموع الجذرين

$\left(\frac{2}{5}+\frac{6}{5}i\right)\left(\frac{2}{5}-\frac{6}{5}i\right)=\frac{4}{25}+\frac{36}{25}=\frac{40}{25}=\frac{8}{5}$ حاصل ضرب الجذرين

$$x^2-\frac{4}{5}x+\frac{8}{5}=0$$



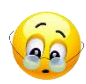
مثال :- اذا كان $2x^2+ax+b=0$ معادلة تربيعية احد جذريها $3+i$, جد قيمتي $a, b \in R$

$a, b \in R$ الجذران مترافقان → $3+i$ الجذر الاول → $3-i$ الجذر الثاني

$(3-i)+(3+i)=6$

$(3-i)(3+i)=9+1=10$

$[x^2-6x+10=0]$



مثال :- اذا كان 3+2i احد جذري المعادلة $x^2-(4-2i)x+a=0$ فما قيمة a وما هو الجذر الاخر

$h=3+2i$ الجذر الاول نفرض الجذر الثاني k

$h+k=(4-2i)$ من المعادلة

$3+2i+k=4-2i \rightarrow k=(4-2i)-(3+2i) \rightarrow k=1-4i$

$h.k=a \rightarrow (3+4i)(1-4i)=3-12i+2i-8i^2 \rightarrow a=11-10i$

واجبات :-كون المعادله التربيعيه في كل ممايأتي

1) معاملاتها حقيقيه واحد جذريها (-2+3i) ج/, $x^2 + 4x + 13 = 0$

2) معاملاتها حقيقيه واحد جذريها $\frac{13-4i}{6+i}$ ؟ ج/ $x^2 - 4x + 5 = 0$

3) معاملاها حقيقيه واحد جذريها $\left(\frac{1+2i}{2-i}\right)^{15}$

4) معاملاها حقيقيه واحد جذريها $\left(\frac{1-i}{(1+i)}\right)^{11}$

5) اذا كان (2+i) احد جذري المعادله $(x^2 + ax + (-2-6i) = 0$ فما قيمه a وما هي قيمه الجذر الاخر ج/ a=i الجذر الاخر -2-2i

مثال :-اوجد عددين مركبين مجموعهما 4 وحاصل ضربهما 15 ؟

الحل :-نفرض العدد الاول هو x والاخر هو y

$$x + y = 4 \quad \dots\dots 1$$

$$xy = 15 \rightarrow x = \frac{15}{y} \dots\dots 2 \; in \; 1$$

$$\left[\frac{15}{y} + y = 4\right] * y \rightarrow 15 + y^2 = 4y \rightarrow y^2 - 4y + 15 = 0$$

$$a = 1 \quad , b = -4 \quad , c = 15$$

$$y = \frac{4 \mp \sqrt{16 - 4(1)(15)}}{2}$$

$$y = \frac{4 \mp \sqrt{16 - 60}}{2} \rightarrow y = \frac{4 \mp \sqrt{-44}}{2} \rightarrow y = \frac{4 \mp \sqrt{44}\, i}{2}$$

$$y = \frac{4 \mp \sqrt{4(11)}\, i}{2} \rightarrow y = 2 \mp \sqrt{11} i \,|$$

$$either\; y = 2 + \sqrt{11} i \rightarrow x = \frac{15}{2 + \sqrt{11} i} * \frac{2 - \sqrt{11} i}{2 - \sqrt{11} i}$$

$$= 2 - \sqrt{11}\, i$$

$$or\; y = 2 - \sqrt{11} i \rightarrow x = 2 + \sqrt{11} i$$



تمارين (1 – 2)



س1/ حل المعادلات التربيعية الاتية ثم بين أي منها يكون جذراها مترافقان

$1)\ z^2 = -12 \xrightarrow{\text{جذر الطرفين}} z = \mp\sqrt{-12}$

$z = \mp\sqrt{12}i \rightarrow z = \mp 2\sqrt{3}i$.: جذراها مترافقان

$b)\ z^2 - 3z + 3 + i = 0$

sol \ $a = 1 \quad b = -3 \quad c = 3 + i$

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow z = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(3+i)}}{2(1)}$$

$$z = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 12 - 4i}}{2} \rightarrow z\frac{3 \pm \sqrt{-3 - 4i}}{2}$$

$x + yi = \sqrt{-3 - 4i}$

$(x + yi)^2 = -3 - 4i \rightarrow x^2 + 2xyi - y^2 = -3 - 4i$

$x^2 - y^2 = -3 \ldots\ldots\ldots 1$

$2xy = -4 \rightarrow xy = -2 \rightarrow x = \frac{-2}{y} \quad \ldots\ldots\ldots 2$

$\left(-\frac{2}{y}\right)^2 - y^2 = -3 \rightarrow \frac{4}{y^2} - y^2 = -3$ نعوض 2 في 1

$[4 - y^4 = -3y^2].\ y^2$

$\therefore y^4 - 3y^2 - 4 = 0$

$(y^2 - 4)(y^2 + 1) = 0\ n$

اما $y^2 + 1 = 0 \rightarrow y^2 = -1$ (يهمل)

او $y^2 - 4 = 0 \rightarrow y^2 = 4 \rightarrow y = \mp 2$

عندما $y = 2 \rightarrow x = \frac{-2}{2} = -1 \rightarrow (-1 + 2i)$

عندما $y = -2 \rightarrow x = \frac{-2}{-2} = 1 \rightarrow [1 - 2i]$

اما $\therefore x = \frac{3 - 1 + 2i}{2} = \frac{2}{2} + \frac{2}{2}i = 1 + i$

او $x=\frac{3+1-2i}{2}=\frac{4-2i}{2}\rightarrow x=2-i$

$s=[1+i\,,2-i]$

c) $2z^2-5z+13=0$ sol : a=2 , b=-5 , c= 13

$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4.2\,.13}}{2\,.\,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-104}}{4}=\frac{5\pm\sqrt{-79}}{4}=\frac{5\pm\sqrt{79}\,i}{4}$

$x=\frac{5}{4}+\frac{\sqrt{79}}{4}i$ OR $x=\frac{5}{4}-\frac{\sqrt{79}}{4}i$ s $\{\frac{5}{4}+\frac{\sqrt{79}}{4}\quad \frac{5}{4}-\frac{\sqrt{79}}{4}\}$

d) $z^2+2z+i(2-i)=0$

ملاحظه\ نقوم بعمليه الضرب قبل الشروع بايجاد a ,b,c

$\because z^2+2z+2i-i^2=0\Rightarrow z^2+2z+1+2i=0$

$z=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(2)\pm\sqrt{(2)^2-4.1\,.(1+2i)}}{2.1}$

$=\frac{-2\pm\sqrt{4-4-8i}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{-8i}}{2}$

$(x+yi)^2=-8i\rightarrow x^2-y^2+2xyi=-8i$

$x^2-y^2=0\ldots\ldots\ldots 1$

$2xy=-8\rightarrow xy=-4\rightarrow x==\frac{-4}{y}$

نعوض 2في 1

$\left(\frac{-4}{y}\right)^2-y^2=0\rightarrow\left[\frac{16}{y^2}-y^2=0\right]y^2$

$16-y^4=0\rightarrow(4+y^2)(4-y^2)=0$

اما $4+y^2=0$ تهمل

or$4-y^2=0\rightarrow y^2=4\rightarrow y=\mp 2$

if$y=2\rightarrow x=\frac{-4}{2}=-2\rightarrow -2+2i$



$$if\, y = -2 \to x = \frac{-4}{-2} = +2 \to 2 - 2i$$

$e)\ 4z^2 + 25 = 0$

$$sol\ \backslash 4z^2 = -25 \to z^2 = \frac{-25}{4} \to z = \mp\sqrt{-\frac{25}{4}} \to z = \mp\sqrt{\frac{25}{4}}\, i$$

$$\therefore z = \mp\frac{5}{2}i$$

f) $z^2 - 2zi + 3 = 0$

sol : ملاحظه:- اي شي موجود مع z يعتبر b

a=1 b = -2i , c = 3

$$z = \frac{-b \pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{2i \pm\sqrt{4i^2-4.1.3}}{2.1} = \frac{2i \pm\sqrt{-4-12}}{2} = \frac{2i \pm\sqrt{16}\, i}{2} = \frac{2i \pm 4\, i}{2} = i \pm 2i$$

1) $z = \frac{6i}{2} = 3i$ او $z = \frac{-2i}{2} = -i$ s : { 3i , - i }

س2/ كون المعادلة التربيعية التي جذراها m , l حيث

a) m = 1 + 2i , L = 1 – i

sol : m + L = (1+2i) + (1 – i) = 2 + i مجموع الجذرين

m . L = (1+2i)(1- i) =(1+2)+(-1+2)i =3+i ضرب الجذرين

المعادله التربيعيه هي 0= ضرب الجذرين+x(مجموع الجذرين)- x^2 :.

$$x^2 - (2+ i)x + 3 + i = 0$$

b) $m = \frac{3-i}{1+i}$, $L = (3 - 2i)^2$

sol : $m = \frac{3-i}{1+i} . \frac{1-i}{1-i} = \frac{3-3i-i+i^2}{1+1} = \frac{3-4i-1}{2} = \frac{2-4i}{2}$ **m = 1 – 2i**

$L = (3 - 2i)^2 = 9 - 12i + 4i^2 = 9-12i-4 = 5 - 12i$

(m + L) = (1 – 2i) + (5 – 12i) = 6 -14i مجموع الجذرين

$m . L = (1 - 2i)(5 - 12i) = 5-10i-12i+24\, i^2 = 5-22i-24 = -19 - 22i$

$x^2 - (6 - 14i)x + (-19 - 22i) = 0$ المعادلة التربيعيه هي

س3/ جد الجذور التربيعيه للاعداد الاتيه

$a) -6i$

$$let\ x + yi = \sqrt{-6i}$$

$(x + yi)^2 = -6i$ تربيع الطرفين

$$x^2 - y^2 + 2xyi = -6i$$

$x^2 - y^2 = 0 \dots\dots\dots 1$

$[2xy = -6\,] \div 2 \rightarrow xy = -3 \rightarrow x = \dfrac{-3}{y} \dots\dots 2$

$\left(\dfrac{-3}{y}\right)^2 - y^2 = 0 \rightarrow \left[\dfrac{9}{y^2} - y^2 = 0\right].y^2$

$9 - y^2 = 0 \rightarrow (3 - y^2)(3 + y^2) = 0$

اما $3 + y^2 = 0$ تهمل

او $3 - y^2 = 0 \rightarrow y^2 = 3 \rightarrow y = \mp\sqrt{3}$

$if\ y = \sqrt{3} \rightarrow \dfrac{-3}{\sqrt{3}} \rightarrow \dfrac{-\sqrt{3}.\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \rightarrow x = -\sqrt{3}(-\sqrt{3} - \sqrt{3}i)$ جذر الاول

$if\ y = -\sqrt{3} \rightarrow \dfrac{-3}{-\sqrt{3}} \rightarrow \dfrac{-\sqrt{3}.\sqrt{3}}{-\sqrt{3}} \rightarrow x = \sqrt{3}(\sqrt{3} - \sqrt{3}i)$ جذر الثاني

$b)\ 7 + 24i$

$let\ x + yi = \sqrt{7 + 24i}$

$x^2 - y^2 + 2xyi = 7 + 24i$ بالتربيع

$x^2 - y^2 = 7 \dots\dots\dots 1$ من التساوي

$2xy = 24] \div 2 \rightarrow xy = 12 \rightarrow x = \dfrac{12}{y} \dots\dots\dots 2$

$\left(\dfrac{12}{y}\right)^2 - y^2 = 7 \rightarrow \left[\dfrac{144}{y^2} - y^2 = 7\right].y^2$

$144 - y^4 = 7y^2 \rightarrow y^4 + 7y^2 - 144 = 0$

اما $y^2 + 16 = 0$ تهمل $or\ y^2 - 9 = 0$

$y^2 = 9 \rightarrow y = \mp 3$

$if y = 3 \rightarrow x = \dfrac{12}{3} \rightarrow x = 4 \rightarrow \quad (4 + 3i)$ الجذر الاول

$if y = -3 \rightarrow x = \dfrac{12}{-3} \rightarrow x = -4 \rightarrow \ (-4 - 3i)$ الجذر الثاني

$c)\ \dfrac{4}{1 - \sqrt{3}i}$

$$\frac{4}{1 - \sqrt{3}i}.\frac{1 + \sqrt{3}i}{1 + \sqrt{3}i} = \frac{4 + 4\sqrt{3}i}{1 + 3} = \frac{4 + 4\sqrt{3}i}{4} = 1 + \sqrt{3}\text{i}$$



$let\ x + yi = \sqrt{1 + \sqrt{3}\,i}$

$x^2 - y^2 + 2xyi = 1 + \sqrt{3}i$ من التساوي

$x^2 - y^2 = 1 \dots \dots \dots 1$

$2xy = \sqrt{3} \to x = \frac{\sqrt{3}}{2y} \dots \dots \dots 2$

$\left(\frac{\sqrt{3}}{2y}\right)^2 - y^2 = 1 \to \left[\frac{3}{4y^2} - y^2 = 1\right].4y^2$

$3 - 4y^4 = 4y^2 \to 4y^4 + 4y^2 - 3 = 0$

$(2y^2 - 1)(2y^2 + 3) = 0$

اما $2y^2 + 3 = 0 \to 2y^2 = -3$ يهمل

او $2y^2 - 1 = 0 \to 2y^2 = 1 \to y^2 = \frac{1}{2} \to y = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}$

$if\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \to x = \frac{\sqrt{3}}{2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{2}.\sqrt{2}}{\sqrt{2}}} \to x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

$\to \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$ جذر الاول

$if\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \to x = \frac{\sqrt{3}}{2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \to x = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

$\to \left(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$ جذر الثاني





س4/ ما المعادلة التربيعية ذات المعاملات الحقيقية واحد جذريها هو

$a)\ i$

$(0+i)+(0-i)=0$

$(0+i)(0-i)=-i^2=1$

$x^2-(0)x+1=0 \rightarrow x^2+1=0$

$b)\ 5-i$

$(5-i)+(5+i)=10$

$(5-i)(5+i)=25+1=26$

$(x^2-10x+26=0)$

$c)\ \frac{\sqrt{2}+3i}{4}$

$$\left(\frac{\sqrt{2}+3i}{4}\right)+\left(\frac{\sqrt{2}-3i}{4}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{3}{4}i\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{3}{4}i\right)=\frac{11}{16}$$

$$x^2-\frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{11}{16}=0$$



س5/ اذا كان $3+i$ هو أحد جذري المعادلة $x^2-ax+(5+5i)=0$ فما قيمة $a \in c$ وما هو الجذر الاخر .

نفرض h=3+i ونفرض الجذر الاخر k

$\mathrm{h.k}=5+5\mathrm{i} \quad \rightarrow (3+i).k=5+5i$

$$k=\frac{5+5i}{3+i}*\frac{3-i}{3-i}=\frac{20+10i}{10}=2+i$$

$a=h+k=(3+i)+(2+i)=5+2i$



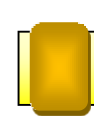
التمثيل الهندسي للاعدد المركبه

التمثيل الهندسي اول شي اذا جان مطلوب منك تسوي مرافق او تضرب في سالب او نضير جمع تكمله من بعده يكلك ضع على شكل ارجاند مجرد تخلي العدد المركب بالصيغة الديكارتية يعني زوج مرتب وتحط على الرسم

1- اذا راد جمع عددين مركبين بياني (فمجرد انته ترسم العددين الي هم بالصيغة الديكارتية زوج مرتب نقطة التقاء الرسم هو الناتج مال الجمع و الطرح بنفس الاسلوب فقط تغير الأشاره)

2- اذا راد منك ضـرب العددين بياني نفس الحالة بس هنا انو نضـرب العدد الناتج من الالتقاء بالعدد المركب الاصلي

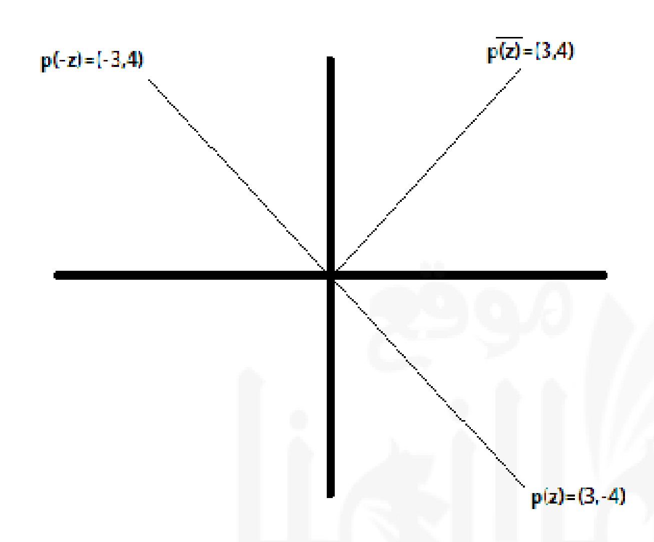




مثال / اذا كان $z = 3 - 4i$. فضع على شكل ارجاند كلا مما يأتي

$z \quad . \ \bar{z}. -z$

$sol\backslash\backslash \quad z = 3 - 4i \qquad \bar{z} = \overline{3 - 4i} = 3 + 4i \quad . -z = (-3, 4)$





مثال :-مثل العمليات الآتية هندسياً في شكل ارجاند

$a)\ (3 + 4i) + (5 + 2i)$

$sol = -(3 + 4i) + (2 + 2i) = 8 + 6i$

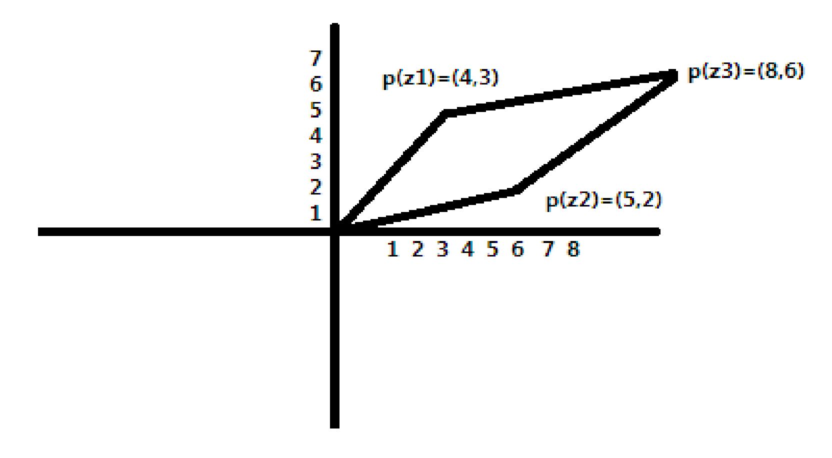
$Z1 = 3 + 4i \rightarrow P(Z1) = P(3.4)$

$Z2 = 5 + 2i \rightarrow P(Z2) = P(5.2)$

$\boldsymbol{Z3 = Z1 + Z2 = 8 + 6i \rightarrow p(Z3) = (8.6)}$

$\boldsymbol{b)\ (6 - 2i) - (2 - 5i)}$

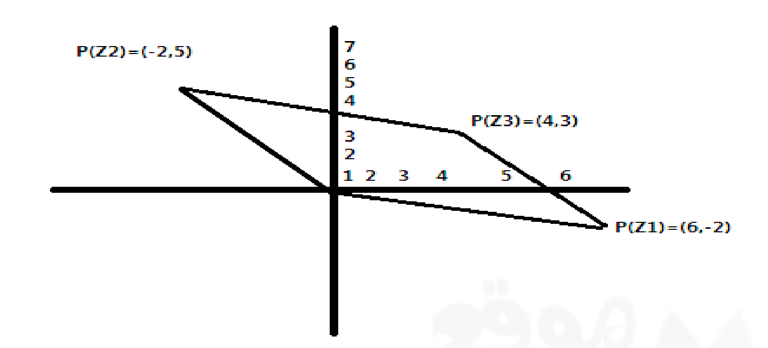
$\boldsymbol{(6 - 2i) + (-2 + 5i) = 4 + 3i}$



$\because Z1 = 6 - 2i \rightarrow P(Z1) = (6. -2)$

$\because Z2 = (-2,5i) \rightarrow P(Z2) = (-2.5)$

$\because Z3 = Z1 - Z2 = 4 + 3i \rightarrow P(Z3) = (4.3)$





تمارين (4 – 1)

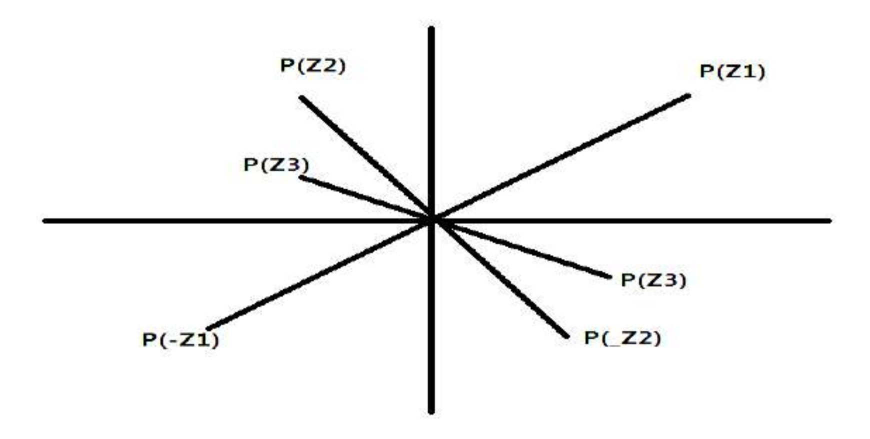
1) اكتب النظير الجمعي لكل من الاعداد التالية ثم مثل هذه الاعداد ونظائرها الجمعية على شكل ارجاند

1) $z_1=2+3i \Rightarrow p(z_1)=(2,3)$, $(-z_1)=-2-3i \Rightarrow p(-z_1)=(-2,-3)$

2) $z_2=-1+3i \Rightarrow p(z_2)=(-1,3)$, $(-z_2)=1-3i \Rightarrow p(-z_2)=(1,-3)$

3) $z_3=1-i \Rightarrow p(z_3)=(1,-1)$, $(-z_3)=-1+i \Rightarrow p(-z_3)=(-1,1)$

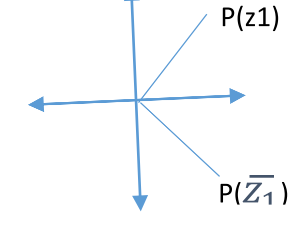
4) $z_4=i \Rightarrow p(z_4)=(0,1)$, $(-z_4)=-i \Rightarrow p(-z_4)=(0,-1)$



2)اكتب العدد المرافق لكل من الاعداد الاتيه ثم مثل الاعداد ومرافقتها في شكل ارجاند

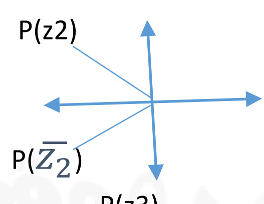
$z_1=5+3i \quad , \overline{z_1}=5-3i$

$p(z_1)=(5,3) \quad p(\overline{z_1})=(5,-3)$



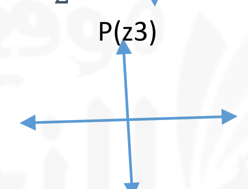
$z_2=-3+2i \quad \overline{z_2}=-3-2i$

$p(z_2)=(-3,2) \quad , p(\overline{z_2})=(-3,-2)$



$z_3=-2i \quad , \quad \overline{z_3}=2i$

$p(z_3)=(0,-2) \quad p(\overline{z_3})=(0,2)$



الصيغه القطبيه

احتاج منك 3 قوانين علمود نطلعها الي هي

1- قانون z او r نفس المعنى نصيحلهم مقياس العدد المركب هذا القانون

$$||z|| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

قوانين القيمة الاساسية لسعة العدد

2- نحتاج نعرف قانون sin وهو $sin\theta = \frac{y}{r}$

3- نحتاج نعرف قانون cos وهو $cos\theta = \frac{x}{r}$

النقطة الثانية والثالثة نصيحلهم زاوية الاسناد والي هي مرات تبقه نفسها ومرات تتغير شوكت تبقه وشوكت تتغير

1- تبقه اذا جان بالربع الاول

2- تتغير حسب قانون الربع اذا جانت اباقي الارباع

a- الربع الثاني قانونه/ $\theta = \pi -$ زاوية الاسناد

b- الربع الثالث قانونه/ $\theta = \pi +$ زاوية الاسناد

c- الربع الرابع قانونه/ $\theta = 2\pi -$ زاوية الاسناد

زين استاذ اشلون نعرف الربع نعرفه حسب الاشارة

الربع الاول كل الزوايا موجبة / الربع الثاني بس sin الربع الثالث بس tan الربع الرابع بس cos

ونحفظهم بهاي العبارة

كل جيب يضلل جيب تمام (كل معناها كلهم موجب / جيب معناها بس ساين / الظل بس تان / جيب تمام كوساين) ونختار الربع



زين استاذ خلصت كلشي بقن الزوايا شلون نحفظهم راح اعلمك طريقة وهي

كل كبير مع كبير ينطيني $\frac{1}{2}$ وكل صغير مع صغير كذلك $\frac{1}{2}$

كل مختلفات يعني كبير مع صغير ينطي $\frac{\sqrt{3}}{2}$

استاذ مفهمت كبير شنو

باوع 60 معناها كبير   30 معناها صغيره

كوساين باللفظ كبيره   ساين باللفظ صغيره

يعني يجتمع الدالة والرقم اشوفهم صغيرات لو كبيرات لو مختلفات

زين استاذ حفظت 60 و 30 بقت بس 45 هاي سهلة وثابتة هي $\frac{1}{\sqrt{2}}$

الزاويه	0	30	45	60	90	180	270	360
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
Sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
Cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1

ملاحظه :- لاتنسه اذا جانت sin=0 او cos=0 فالزاويه تكون على احد المحاور يعني قيمتها وحده من القيم $\theta = (0\ ,90, 180\ ,270)$

مثال / جد المقياس والقيمة الاساسية للسعة z في كل ممایاتي لكل من الاعداد المركبة الآتية.



$a)\ \ z = 1 - \sqrt{3}i$

$\therefore z = (1. \sqrt{3}) \rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1)^2 + (-\sqrt{3})^2}$

$r = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

$cos\emptyset = \frac{x}{r} = \frac{1}{2}$.

$sin\emptyset = \frac{(-\sqrt{3})}{2}$ | زاوية الاسناد هي $\frac{\pi}{3}$ تقع في الربع الرابع

$\therefore \emptyset = 2\pi -$ زاويه الاسناد

$\theta = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{6\pi - \pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$

$b) z = (-1 - i)$

$z = (-1.-1) \rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow r = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2}$

$r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \quad , sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

$c) \; z = \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^5$

$z = \left(\frac{1-i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i}\right)^5 = \left(\frac{1 - i - i + i^2}{1+1}\right)^5 = \left(\frac{1 - 2i - 1}{2}\right)^5$

$= \left(\frac{-2i}{2}\right)^5 = (-i)^5 = -i^5 = -i = 0 - i$

$\therefore r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{0+1} = \sqrt{1} = 1$

$cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{0}{1} = 0$

$sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-1}{1} = -1 \; \theta = \frac{3\pi}{2} \therefore$

اخذنه أمثلة عن القيمة الاساسية والسعة هسة نجي للصيغة القطبية بالتفصيل

استاذ شو شرحت وخلصت مكتلي وين اخلي الي ستخرجتهم اني اكلك نحطهم بهذا القانون الي هو مال الصيغة القطبية

$$r(cos\,\theta + isin\theta) \quad ,\theta \in (0, 2\pi)$$



مثال / عبر عن الاعداد الآتية بالصورة القطبية

$a) \; -2 + 2i$

$z = (-2.2) \rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-2)^2 + (2)^2}$

$= \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$



$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$ ∴ زاويه الاسناد هي $\frac{\pi}{4}$ و تقع في الربع الثاني ,

$$\therefore \theta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi - \pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

∴ الصورة القطبية هي $z = r[\cos\theta + i\sin\theta]$

$$z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

b) $\frac{1+i}{1-i} = \left(\frac{1+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i}\right) = \frac{1+2i+i^2}{2} = \frac{1+2i-1}{2}$

$$z = \frac{2i}{2} \to i \to 0 + i \to z = (0, 1)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(0)^2 + (1)^2} = \sqrt{1} = 1$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{1} = 1 \qquad \therefore \theta = \frac{\pi}{2}$$

∴ الصيغة القطبية للعدد المركب هي $z = r[\cos\theta + i\sin\theta]$

$$z = \left[\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right]$$



sol\ $\frac{2i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{2i - 2i^2}{1+1} = \frac{2+2i}{2} = 1 + i$

$$\therefore r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$ ∴ زاوية الاسناد هي $\frac{\pi}{4}$ وتقع في الربع الاول :– $\theta = \frac{\pi}{4}$

∴ الصيغة القطبية هي $z = r[\cos\theta + i\sin\theta]$

$$\therefore z = \sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right]$$

ملاحظه 1/اذا جان العدد المركب مالتنه مو كامل نكمله ونشتغل شغل أعتيادي ونطلع الصيغة القطبية اله

2-اونتبع الطريقه:-اذا جان العدد المركب حقيقي بس او تخيلي نتبع هاي الصيغه

$$1)\quad 1 = cos0 + isin0$$

$$2)\quad -1 = cos\pi + isin\pi$$

$$3)\ i = cos\frac{\pi}{2} + isin\frac{\pi}{2}$$

$$4)\ -i = cos\frac{3\pi}{2} + isin\frac{3\pi}{2}$$

مثال:-عبر عن كل ممایاتي بالصيغه القطبيه

$$1)\ 2 = 2(1) = 2(cos0 + isin0)$$

$$2)\ \frac{1}{3}i = \frac{1}{3}\left(cos\frac{\pi}{2} + isin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$3)\ -6i = 6(-i) = 6(cos\frac{3\pi}{2} + isin\frac{3\pi}{2})$$

ان النجاح لايحتاج الى أقدام..........بل يحتاج الى إقدام

الاستاذ:- حمزه حازم الكربلائي



طريقه خاصه لتقليل الزوايا

1-اكو اختصار (اذا جان اكو نختصر)

2-اذا جانت الزاويه بهل شكل $\frac{a\pi}{b}$ نحسب قيمه a/b فقط اذا جانت قيمتها اكبر من 2 نختار اقرب عدد زوجي اصغر من ناتج القسمه نضربه بالمقام ونطرحه من البسط مقسوم على نفس المقام

3-اذا جانت الزاويه سالبه نقسم a/b وراها نختار اقرب عدد زوجي موجب اصغر من ناتج القسمه نضربه بالمقام ونضيفه من البسط مقسوم على نفس المقام

ملاحظات :-

1-اذا جان المقام 1او2 مباشرا نحسب الزاويه

2-اذا جان المقام 4,6,3 نحسب الزاويه بشكل مباشر وال a تترك لنا اشاره

3-اذا جان غير النقطتين الفوك هنا لازم نخفض الزاويه حسب اول نقطتين

$$1)\ \frac{23\pi}{6} \to 2 \text{ نختار} \to \frac{23\pi - 12\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$$

$$2)\ \frac{49\pi}{4} \to 12 \text{ نختار} \to \frac{49\pi - 48\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

$$3)\ \cos\frac{2\pi}{3} = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$4)\ \sin\frac{5\pi}{4} \to 5\pi = 5 * 45 = 225 \ (\text{تقع في الربع الثالث})$$

$$5)\ \sin\frac{5\pi}{4} = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$6)\ \cos\frac{11\pi}{6} \to 11 * 30 \to 330 (\text{تقع في الربع الرابع})\ \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$7)\ \cos\frac{15\pi}{19}$$

$$8)\ \frac{27\pi}{6} \text{ يوجد اختصار نختصر} = \frac{9\pi}{2} = \frac{9\pi - 8\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

مبرهنة ديموافر

حالات مبرهنة ديموافر

1- الحالة الاولى يكون بيها الاس مالتنة موجب والقانون بهل صيغة

$$r(cos\theta + isn\theta)^{n \text{موجب}}$$

الحل / الاس يصير اس لل r والاس ينضرب بالزاوية ويصير هيج

$$r^n(\cos n\theta + i\sin\ n\,\vartheta)$$

الحالة الثانية الي يكون بيها الاس سالب (هنا نفس الحالة الاولى بس الاشارة البنص تتغيار)

لاحظ القانون شلون يصير صيغته قبل الحل وصيغته من تحل

$$r(cos\theta + isin\theta)^{-n \text{سالب}}$$

نفس خطوات حال الحالة الاولى فقط لاحظ التغير

$$\frac{1}{r^n}(\cos n\,\theta - i\sin n\,\theta)$$

الحالة الثالثة / الي هي كسر هنا مجرد قانون هاي الصيغة

$$r(cos\theta + isin\theta)^{\frac{1}{n}}$$

هم يصير اس عل r بس راح يتغير القانون يصير بهل صيغة وتحل

$$r^{\frac{1}{2}}(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n})$$

ملاحظه:-نستخدم الحالة 3 اذا طلب من عدنه جذور تربيعيه او تكعيبيه او غيرها وكذالك قيمة عدد مركب مرفوع الى اس كسر

استاذ k شنو؟ صديقي هاي من يطلب منك جد الجذور التربيعية او جد الجذور التكعيبية او جد الجذور الخمسة k تبدي تعوض من 0 لحد متوصل 5 تعويضات وتوكف وها كل ماتعوض اطلع حل



أمثلة متنوعة حول ديموافر



مثال / احسب باستخدام ديموافر $(1+i)^{11}$

sol $z = 1 + i \rightarrow z = (1,1) \rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1+1}$
$= \sqrt{2}$

$$cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$sin\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

.: زاوية الاسناد $= \frac{\pi}{4}$ وان θ تقع في الربع الاول

$$\because \theta = \frac{\pi}{4}$$

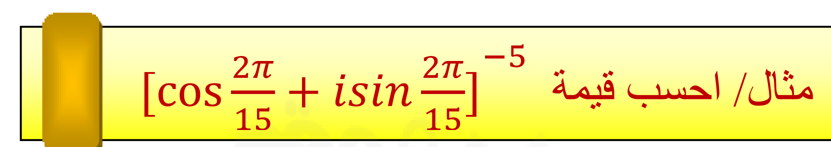
$$z = r[cos\theta + isin\theta]$$

$$\because z^n = r^2[cosn\theta + isin\, n\theta]$$

$$\because \quad (1+i)^{11} = (\sqrt{2})^{11}\left[cos\frac{\pi}{4} * 11 + isin\frac{\pi}{4} * 11\right]$$

$$32\sqrt{11}\left[cos\frac{11\pi}{4} + isin\frac{11\pi}{4}\right]$$

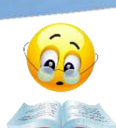
$$32\sqrt{2}\left[-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right] = 32(-1+i)$$



مثال/ احسب قيمة $[\cos\frac{2\pi}{15} + isin\frac{2\pi}{15}]^{-5}$

$$[\cos\frac{2\pi}{15} * 5 - isin\frac{2\pi}{15} * 5]$$

$$= [\cos\frac{2\pi}{3} - isin\frac{2\pi}{3}] = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

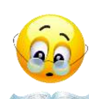



مثال/احسب $\frac{1}{\left(\cos\frac{5\pi}{12}+isin\frac{5\pi}{12}\right)^3}$

$$\left(\cos\frac{5\pi}{12}+isin\frac{5\pi}{12}\right)^{-3}=\cos\frac{5\pi}{12}*3-isin\frac{5\pi}{12}*3$$

$$=\cos\frac{5\pi}{4}-isin\frac{5\pi}{4}=-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$$

$Ex/\ \left(-\sqrt{2}-\sqrt{2}i\right)^{12}$



sol $(-\sqrt{2}.-\sqrt{2})$

$$\therefore r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\left(-\sqrt{2}\right)^2+\left(-\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{2+2}=\sqrt{4}=2$$

$$cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{\left(-\sqrt{2}\right)}{2}=\frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{-\sqrt{2}}{2}=\frac{-1}{\sqrt{2}}$$.: زاوية الاسناد هي $\frac{\pi}{4}$ وتقع في الربع الثالث

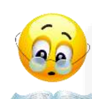
$$\therefore\theta=\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{4\pi+\pi}{4}\rightarrow\theta=\frac{5\pi}{4}$$

$$\therefore z^n=r^2[cosn\theta+isin\,n\theta]$$

$$\therefore\left(-\sqrt{2}-\sqrt{2}i\right)^{12}=(2)^{12}\left[cos\frac{5\pi}{4}*12+isin\frac{5\pi}{4}*12\right]$$

$$=4096(cos15\pi+isin15\pi]\quad=4096(cos\pi+isin\pi]$$

$$4096(-1+0i)=-4096$$



مثال// جد $(-2i)^{\frac{1}{2}}$ باستخدام ديموافر

sol $z=0-2i\rightarrow z=(0,-2)$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(0)^2+(-2)^2}=\sqrt{0+4}=\sqrt{4}=2$$

$$cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{0}{2}=0$$

$$sin\theta=\frac{y}{r}=-\frac{2}{2}=-1\ :\rightarrow\theta=\frac{3\pi}{2}$$

$z=r[cos\theta+isin\theta]$ الصورة القطبية هي .:



$$z=2\left[cos\frac{3\pi}{2}+isin\frac{3\pi}{2}\right]$$

$$\therefore(-2i)^{\left(\frac{1}{n}\right)}=\sqrt[n]{r}[cos\frac{\theta+2\pi k}{n}+isin\frac{\theta+2\pi k}{n}]$$

$$\sqrt{2}[cos\frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi k}{2}+isin\frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi k}{2}]$$

$$=\sqrt{2}[cos\frac{3\pi+4\pi k}{4}+isin\frac{3\pi+4\pi k}{4}]$$

$$\therefore k=0,1$$

$$Z1=\sqrt{2}[cos\frac{3\pi+4\pi(0)}{4}+isin\frac{3\pi+4\pi(0)}{4}]$$

$$Z1=\sqrt{2}[cos\frac{3\pi}{4}+isin\frac{3\pi}{4}]\;=\sqrt{2}\left[\frac{-1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right]\rightarrow Z1=-1+i$$

$2-when\ k=1$

$$Z2=\sqrt{2}[cos\frac{3\pi+4\pi(1)}{4}+isin\frac{3\pi+4\pi(1)}{4}]$$

$$=\sqrt{2}[cos\frac{3\pi+4\pi}{4}+isin\frac{3\pi+4\pi}{4}]$$

$$=\sqrt{2}[cos\frac{7\pi}{4}+isin\frac{7\pi}{4}]\;\rightarrow Z2=\sqrt{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right]=1-i$$

مثال/ حل المعادلة $x^3+1=0$ حيث $x\in c$

sol

$$x^3+1=0\rightarrow x^3=-1\rightarrow x=\sqrt[3]{-1}$$

$$\therefore x=(-1)^{\frac{1}{3}}$$

$$Z=-1+0i\rightarrow r=\sqrt{(-1)^2+0}\rightarrow r=1$$

$$cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{-1}{1}=-1$$

$$sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{0}{1}=0\;\;;\rightarrow\theta=\pi$$

الصورة القطبية $\therefore$ $z=r[cos\theta+isin\theta]$

$$z=r[cos\pi+isin\pi]$$

$$Z^{\frac{1}{2}}=\sqrt[n]{r}[cos\frac{\theta+2\pi k}{n}+isin\frac{\theta+2\pi k}{n}]$$

$$= \left[\cos\frac{\pi+2\pi k}{3} + i\sin\frac{\pi+2\pi k}{3}\right]$$

$k = 0, 1, 2$

$when\ k = 0$

$$Z1 = \left[\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right] \to Z1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$when\ k = 1$

$$Z2 = \left[\cos\frac{\pi+2\pi}{3} + i\sin\frac{\pi+2\pi}{3}\right] = \left[\cos\frac{3\pi}{3} + i\sin\frac{3\pi}{3}\right]$$

$$= [\cos\pi + i\sin\pi] \to Z2 = -1 + 0i$$

$when\ k = 2$

$$\therefore Z3 = \left[\cos\frac{\pi+2\pi(2)}{3} + i\sin\frac{\pi+2\pi(2)}{3}\right] = \left[\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right]$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

مثال/باستخدام مبرهنه ديموافر جد الجذر التكعيبي للعدد (-8i)

sol $z = 0 - 8i \to z = (0, -8)$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \to r = \sqrt{(0)^2 + (8)^2}$$

$$\therefore r = \sqrt{64} \to r = 8$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{0}{8} = 0$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-8}{8} = -1$$

زاوية الاسناد هي .: $\frac{3\pi}{2}$

$$\therefore \theta = \frac{3\pi}{2}$$

الصورة القطبية .: $z = r[\cos\theta + i\sin\theta]$

$$Z = 8\left[\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right]$$

$$\sqrt[n]{Z}\left[\cos\frac{\theta+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\theta+2\pi k}{n}\right]$$

$$= \sqrt[3]{8}\left[\cos\frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi k}{3} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi k}{3}\right]$$



$$= 2\left[\cos\frac{3\pi+4\pi k}{6} + i\sin\frac{3\pi+4\pi k}{6}\right]$$

$\therefore k = 0, 1, 2$

When k=0

$$= 2\left[\cos\frac{3\pi+4\pi(0)}{6} + i\sin\frac{3\pi+4\pi(0)}{6}\right]$$

$$= 2\left[\cos\frac{3\pi}{6} + i\sin\frac{3\pi}{6}\right] \rightarrow = 2\left[\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right] = 2[0+i]$$

$$= 0 + 2i$$

$\therefore Z1 = 0 + 2i$

$when\ k = 1$

$$= 2\left[\cos\frac{3\pi+4\pi(1)}{6} + i\sin\frac{3\pi+4\pi(1)}{6}\right]$$

$$= 2\left[\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right]$$

$$= 2\left[\frac{-\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right] \rightarrow \therefore Z2 = -\sqrt{3} - i$$

$when\ k = 2$

$$= 2\left[\cos\frac{3\pi+4\pi(2)}{6} + i\sin\frac{3\pi+4\pi(2)}{6}\right]$$

$$= 2\left[\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right]$$

$$= 2\left[\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right] \rightarrow \therefore Z3 = \sqrt{3} - i$$

ملاحظة مهمة جداً :- اذا جان الاس هو رقم على رقم يعني الرقم الي بالبسط مو 1 غيره (معناه نطبق حالتين معا) طرق الحل

1- ناخذ البسط الاس ونطبق

$$z^{\text{رقم البسط}} = r^{\text{رقم البسط}}[\cos \text{رقم البسط}\ \theta + i\sin \text{رقم البسط}\ \theta]$$

2- من اخذنه البسط راح يبقه على عدد نجي نخلي اس للناتج الي طلع من 1



مثال /اوجد الصيغة القطبية للعدد $(\sqrt{3}+i)^{\frac{2}{5}}$ باستخدام ديموافر :-

$$z=\sqrt{3}+i \rightarrow z=(\sqrt{3},1) \rightarrow r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=2$$

$$cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{1}{2}$ زاوية الاسناد $=\frac{\pi}{6}$ وتقع في الربع الاول

$$\therefore \theta=\frac{\pi}{6}$$

$z^{\text{رقم البسط}}=r^{\text{رقم البسط}}[\cos \text{رقم البسط}\ \theta+i\sin \text{رقم البسط}\ \theta]$

$$\therefore (\sqrt{3}+i)^2=(2)^2\left[\cos 2*\frac{\pi}{6}+i\sin 2*\frac{\pi}{6}\right]$$

$=4\left[\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{4}\right]$ نجيب الاس البقه نخليه عله هذه الناتج

$$\therefore Z^{\frac{1}{2}}=\sqrt[n]{r}[\cos\frac{\theta+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\theta+2\pi k}{n}]$$

$$=\sqrt[5]{4}[\cos\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi k}{5}+i\sin\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi k}{5}]$$

$$=\sqrt[5]{4}[\cos\frac{\pi+6\pi k}{15}+i\sin\frac{\pi+6\pi k}{15}]$$

1 – when $k=0 \rightarrow=\sqrt[5]{4}[\cos\frac{\pi}{15}+i\sin\frac{\pi}{15}]$

2 – when $k=1 \rightarrow=\sqrt[5]{4}[\cos\frac{7\pi}{15}+i\sin\frac{7\pi}{15}]$

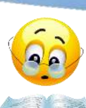
3 – when $k=2 \rightarrow=\sqrt[5]{4}[\cos\frac{13\pi}{15}+i\sin\frac{13\pi}{15}]$

4 – when $k=3 \rightarrow=\sqrt[5]{4}[\cos\frac{19\pi}{15}+i\sin\frac{19\pi}{15}]$

5 – when $k=4 \rightarrow=\sqrt[5]{4}[\cos\frac{25\pi}{15}+i\sin\frac{25\pi}{15}]$

$$=\sqrt[5]{4}[\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}]$$





مثال / جد $(-1+\sqrt{3}i)^{\frac{3}{4}}$

$$z=-1+\sqrt{3}i \rightarrow z=(-1,\sqrt{3}) \rightarrow r=\sqrt{(x^2+y^2)}$$

$$=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}$$

$$=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$$

$$cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{-1}{2}$$

$$sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

.: زاوية الاسناد هي $\frac{\pi}{3}$ وتقع على الربع الثاني

$$:.\theta=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$$

$$:.Z=r[cos\theta+isin\theta]$$

$$z=2\left[cos\frac{2\pi}{3}+isin\frac{2\pi}{3}\right]$$

$$:.z^3=(2)^3\left[cos\,3*\frac{2\pi}{3}+isin\,3*\frac{2\pi}{3}\right]=8[cos2\pi+isin2\pi]$$

$$:.z^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{r}\left[cos\frac{\theta+2\pi k}{n}+isin\frac{\theta+2\pi k}{n}\right]$$

$$(z^3)^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{8}\left[cos\frac{2\pi+2\pi k}{4}+isin\frac{2\pi+2\pi k}{4}\right]$$

$$:.k=0,1,2,3$$

$$1-when\ k=0 \rightarrow Z1=\sqrt[4]{8}\left[cos\frac{2\pi}{4}+isin\frac{2\pi}{4}\right]$$

$$:.Z1=\sqrt[4]{8}[0+i]=\sqrt[4]{8}i$$

$$2-when\ k=1 \rightarrow Z1=\sqrt[4]{8}\left[cos\frac{4\pi}{4}+isin\frac{4\pi}{4}\right]$$

$$=\sqrt[4]{8}[cos\pi+isin\pi] \rightarrow Z2=\sqrt[4]{8}[-1+0]=-\sqrt[4]{8}$$

$$3-when\ k=2 \rightarrow Z3=\sqrt[4]{8}\left[cos\frac{6\pi}{4}+isin\frac{6\pi}{4}\right]$$

$$=\sqrt[4]{8}\left[cos\frac{3\pi}{2}+isin\frac{3\pi}{2}\right] \rightarrow Z3=\sqrt[4]{8}[0-i]=-\sqrt[4]{8}i$$

$$4 - when\ k = 3 \rightarrow Z4 = \sqrt[4]{8}\left[cos\frac{8\pi}{4} + isin\frac{8\pi}{4}\right]$$

$$= \sqrt[4]{8}[cos2\pi + isin2\pi] \rightarrow Z4 = \sqrt[4]{8}[1 + 0i] = \sqrt[4]{8} **$$



مثال / اثبت ان $\frac{[cos30+isin30]^5[cos40+isin40]^6}{[cos300+isin300]} = i$

$$L.H.S = \frac{[cos30 + isin30]^5[cos40 + isin40]^6}{[cos300 + isin300]}$$

$$= \frac{[cos10 + isin10]^{15}[cos10 + isin10]^{24}}{[cos10 + isin10]^{30}}$$

$$= \frac{[cos10 + isin10]^{39}}{[cos10 + isin10]^{30}} = [cos10 + isin10]^{39-30}$$

$$= [cos10 + isin10]^9 = [cos90 + isin90] = [0 + i] = i$$

$$= R.H.S$$

تمارين (5 – 1)



س1/ احسب ما ياتي

a) $(cos\frac{5\pi}{24} + isin\frac{5\pi}{24})^4$

$$= \left[cos\frac{5\pi}{24} + isin\frac{5\pi}{24}\right]^4 = \left[cos\frac{5\pi}{24} * 4 + isin\frac{5\pi}{24} * 4\right]$$

$$= \left[cos\frac{5\pi}{6} + isin\frac{5\pi}{6}\right] = \left[-cos\frac{5\pi}{6} + isin\frac{5\pi}{6}\right] = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

b) $(cos\frac{7\pi}{12} + isin\frac{7\pi}{12})^{-3}$

$$= \left[cos\frac{7\pi}{12} + isin\frac{7\pi}{12}\right]^{-3} = \left[cos\frac{7\pi}{12} * 3 - isin\frac{7\pi}{12} * 3\right]$$

$$= \left[cos\frac{7\pi}{4} - isin\frac{7\pi}{4}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$$





س2/احسب باستخدام مبرهنة ديموافر ما ياتي :-

a) $(1-i)^7$

sol: –

$z = 1 - i \to z = (1, -1)$

$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$cos = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$sin = \frac{y}{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ زاوية الاسناد هي $\frac{\pi}{4}$ وتقع في الربع الرابع .:

$\therefore \theta = 2\pi - \frac{\pi}{4} \to \theta = \frac{5\pi}{4}$

$\therefore z = r[cos\theta + isin\theta]$

$= \sqrt{2}\left[cos\frac{7\pi}{4} + isin\frac{7\pi}{4}\right]$

$\therefore z^n = r^n[cosn\theta + isin\, n\theta]$

$\therefore (1-i)^7 = (\sqrt{2})^7\left[cos\, 7 * \frac{7\pi}{4} + isin\, 7 * \frac{7\pi}{4}\right]$

$= 8\sqrt{2}\left[cos\frac{49\pi}{4} + isin\frac{49\pi}{4}\right]$

$= 8\sqrt{2}\left[cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4}\right] = 8\sqrt{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right] = 8 + 8i$

b) $(\sqrt{3} + i)^{-9}$

sol: $\to z = (\sqrt{3} + i) \to z = (\sqrt{3}, 1)$

$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$

$cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{2}$ زاوية الاسناد هي $\frac{\pi}{6}$ وتقع في الربع الاول .:

$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}$

$z = r[cos\theta + isin\theta]$

$= (2)^9\left[\cos 9 * \frac{\pi}{6} + isin\, 9 * \frac{\pi}{6}\right]$



$$= 512[\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}] \quad = 512[0 + i(-1)] = -512i$$

س3/بسط ما ياتي

a) $\frac{(\cos2\theta+i\sin2\theta)^5}{(\cos3\theta+i\sin3\theta)^3}$

sol; – $\frac{[\cos\theta+i\sin\theta]^{10}}{[\cos\theta+i\sin\theta]^9} = [\cos\theta + i\sin\theta]^{10-9} = [\cos\theta + i\sin\theta]^1$

b) $(\cos\theta + i\sin\theta)^8 \ \ (\cos\theta - i\sin\theta)^4\ ]^{-4}$

$$= [\cos\theta + i\sin\theta]^{8-4} = [\cos\theta + i\sin\theta]^4$$
$$= [\cos4\theta + i\sin4\theta]$$



س4/ جد الجذور التربيعية للعدد المركب $-1+\sqrt{3}i$ باستخدام مبرهنة ديموافر ...

sol;

$$(-1+\sqrt{3}i)^{\left(\frac{1}{2}\right)} \rightarrow z = -1+\sqrt{3}i \rightarrow r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-1}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$ ∴ زاوية الاسناد هي $\frac{\pi}{3}$ وتقع في الربع الثاني

$$\theta = \pi - \frac{\pi}{3} \rightarrow \frac{3\pi-\pi}{3} \rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$$

$$\therefore z = r[\cos\theta + i\sin\theta] \rightarrow z = 2[\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}]$$

$$Z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r}[\cos\frac{\theta+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\theta+2\pi k}{n}]$$

$$= \sqrt{2}[\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi k}{2} + i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi k}{2}]$$

$$= \sqrt{2}[\cos\frac{2\pi+6\pi k}{6} + i\sin\frac{2\pi+6\pi k}{6}]$$



$$\therefore k = 0,1$$

$$if Z1 = \sqrt{2}[\cos\frac{2\pi + 6\pi k}{6} + i\sin\frac{2\pi + 6\pi k}{6}]$$

$$Z1 = \sqrt{2}[\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}] \rightarrow \sqrt{2}\left[\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right] \therefore Z1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$2 if\ k = 1$$

$$\therefore Z2 = \sqrt{2}[\cos\frac{2\pi + 6\pi k}{6} + i\sin\frac{2\pi + 6\pi k}{6}]$$

$$= \sqrt{2}[\cos\frac{8\pi}{6} + i\sin\frac{8\pi}{6}] \rightarrow = \sqrt{2}[\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}]$$

$$= \sqrt{2}[-\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}] \rightarrow = \sqrt{2}\left[\frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right] = \frac{-1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}i$$



س5/ باستخدام مبرهنة ديموافر جد الجذور التكعيبية للعدد $27i$

sol $(27i)^{\left(\frac{1}{3}\right)} \rightarrow z = 0 + 27i$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(0)^2 + (27)^2} = \sqrt{(27)^2} = 27$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{0}{27} = 0$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{27}{27} = 1 \qquad \therefore \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore z = r[\cos\theta + i\sin\theta] \rightarrow z = 27\left[\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right]$$

$$Z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r}[\cos\frac{\theta + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\theta + 2\pi k}{n}]$$

$$(27i)^{\frac{1}{2}} = \sqrt[3]{27}\ [\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3}]$$

$$= 3\left[\cos\frac{\pi + 4k}{6} + i\sin\frac{\pi + 4k}{6}\right]$$

$$\therefore k = 0,1,2$$

$$1 - when\ k = 0 \rightarrow Z1 = 3\left[\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right]$$

$$\therefore Z1 = 3\left[\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right] = \left[\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i\right]$$

$2-when\ k=1\rightarrow Z2=3\left[cos\frac{5\pi}{6}+isin\frac{5\pi}{6}\right]=3\left[-cos\frac{\pi}{6}+isin\frac{\pi}{6}\right]$

$\therefore Z2=3\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right]=\left[\frac{-3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i\right]$

$3-when\ k=2\rightarrow Z2=3\left[cos\frac{9\pi}{6}+isin\frac{9\pi}{6}\right]=3\left[cos\frac{3\pi}{2}+isin\frac{3\pi}{2}\right]$

$\therefore Z1=3[0-i]=-3i$



س6/جد الجذور الاربعة للعدد (-16) باستخدام مبرهنة ديموافر

sol\ $z=-16+0i\rightarrow r=\sqrt{x^2+y^2}\rightarrow r=\sqrt{(-16)^2+0}$
$=16$

$cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{-16}{16}=-1$

$sin\ \theta=\frac{y}{r}=\frac{0}{16}=0$

$\therefore\theta=\pi$

$\therefore z=r[cos\theta+isin\theta]$

$Z^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{r}[\cos\frac{\theta+2\pi k}{n}+isin\frac{\theta+2\pi k}{n}]$

$=\sqrt[4]{16}[\cos\frac{\pi+2\pi k}{4}+isin\frac{\pi+2\pi k}{4}]$

$\therefore k=0,1,2,3$

$if\ k=0\rightarrow Z1=2[\cos\frac{\pi}{4}+isin\frac{\pi}{4}]=2\left[\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right]$

$\therefore Z1=\sqrt{2}+\sqrt{2}i$

$if\ k=1\rightarrow Z2=2[\cos\frac{3\pi}{4}+isin\frac{3\pi}{4}]=2\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right]$

$\therefore Z2=-\sqrt{2}+\sqrt{2}i$

$if\ k=2\rightarrow Z3=2[\cos\frac{5\pi}{4}+isin\frac{5\pi}{4}]=2\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right]$

$\therefore Z3=-\sqrt{2}-\sqrt{2}i$

$if\ k=3\rightarrow Z4=2[\cos\frac{6\pi}{4}+isin\frac{6\pi}{4}]=2\left[\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right]$



$$\therefore Z4 = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$$

س7/اوجد قيم $(-64i)^{\frac{1}{6}}$ باستخدام مبرهنة ديموافر

$$z = 0 - 64i \rightarrow z = (0, -64\ )$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(0)^2 + (-64)^2} = \sqrt{(-64)^2} = 64$$
$$\therefore cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{0}{64} = 0$$
$$sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-64}{64} = -1$$
$$\therefore \theta = \frac{3\pi}{2}$$
$$\therefore \boldsymbol{z = r[cos\theta + isin\theta]}$$ الصورة القطبية
$$\boldsymbol{z = 64\left[cos\frac{3\pi}{2} + isin\frac{3\pi}{2}\right]}$$
$$\boldsymbol{Z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r}[\cos\frac{\theta + 2\pi k}{n} + isin\frac{\theta + 2\pi k}{n}]}$$
$$\therefore (-64i)^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{\boldsymbol{64}}[\boldsymbol{\cos\frac{\frac{3\pi}{2} + 2\pi k}{6} + isin\frac{\frac{3\pi}{2} + 2\pi k}{6}}]$$
$$= \boldsymbol{2[\cos\frac{3\pi + 4\pi k}{12} + isin\frac{3\pi + 4\pi k}{12}]}$$
$$\therefore \mathrm{k} = 0,1,2,3,4,5$$
when $\mathrm{k} = 0$

$$Z1 = \boldsymbol{2[\cos\frac{3\pi}{12} + isin\frac{3\pi}{12}]} = 2[\boldsymbol{\cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4}}] = 2\left[\boldsymbol{\frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i}\right]$$
$$= \sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

$\mathrm{k} = 1 \quad Z2 = \boldsymbol{2[\cos\frac{7\pi}{12} + isin\frac{7\pi}{12}]}$

when $\mathrm{k} = 2 \quad Z3 = \boldsymbol{2[\cos\frac{11\pi}{12} + isin\frac{11\pi}{12}]}$

when $\mathrm{k} = 3 \quad Z4 = \boldsymbol{2[\cos\frac{15\pi}{12} + isin\frac{15\pi}{12}]} = 2[\boldsymbol{\cos\frac{5\pi}{4} + isin\frac{5\pi}{4}}]$

$$2\left[\frac{-1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right] = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$$

when k = 4 $\quad Z5 = 2[\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12}]$

when k = 5 $\quad Z6 = 2[\cos\frac{23\pi}{12} + i\sin\frac{23\pi}{12}]$

الموضوع للفرع التطبيقي

الجذور التكعيبيه للواحد الصحيح

$z = \sqrt[3]{1}$ بتكعيب الطرفين $z^3 = 1 \to z^3 - 1 = 0 \to (z-1)(z^2+z+1) = 0$

$z = 1 \; or \quad z^2 + z + 1 = 0 \qquad a = 1 \quad b = 1 \quad c = 1$

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \to z = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(1)}}{2(1)}$$

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} \to z = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} = -\frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

:. الجذور التكعيبية للواحد هي $\left(1 , -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i , -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

راح نرمز للجذر الاول هو ω وراح نرمز للجذر الثاني هو ω^2

هسه عدنه شغلتين مهمه الي همه

مجموع الجذور الثلاثه =0

1) $\omega + \omega^2 + 1 = 0$

2) $\omega^3 = 1$

حاصل ضرب الجذور الثلاثة يساوي واحد

3) $1.\omega.\omega^2 = 1 \implies \omega^3 = 1 \implies (\omega^3)^n = 1$

4) مرافق ω هو ω^2 ومرافق ω^2 هو ω

حاصل طرح الجذرين التخيلين يساوي $\pm\sqrt{3}i$

5) $\omega^2 - \omega = \omega - \omega^2 = \pm\sqrt{3}i$



هسه من المعادله الاولى نشتق 6 علاقات شلون شوف نبقي حد وننقل حدين هاي منها 3 علاقات ونبقي حدين وننقل حد هاي منها 3 علاقات شوفهم

$1)1+\omega=-\omega^2 \quad 2)1+\omega^2=-\omega \quad 3)\omega+\omega^2=-1$
$4)\omega=-1-\omega^2 \quad 5)\omega^2=-1-\omega \quad 6)1=-\omega-\omega^2$

زين استاذ شنو نستفاد منهم شوف نستفاد بالحل تعتبر خاصيه يعني اذا تلكي وحده منهم راح انعوض بما يساويها وهكذا ..

هنا هم عدنه مثل i اذا جان اس ω اكبر من 3 شنو نسوي شوف القاعده

الاس اكبر من 3 $\omega^n \to$

1-اذا جان الاس يقبل القسمه على 3 بدون باقي الناتج مالته 1

2-اذا جان الاس يقبل القسمه على 3 وباقي 1 الناتج مالتنه ω

3-اذا جان الاس يقبل القسمه على 3 وباقي 2 الناتج مالتنه ω^2

امثله :-

$1)\omega^6=1 \qquad 2)\omega^{19}=\omega \qquad 3)\omega^{26}=\omega^2$

ملاحظه :-اذا جان اس ال ω سالب الحل (انزله للمقام ونخلي بالبسط اوميكا اسها اعله من اس المقام يقبل القسمه على 3 بدون باقي ونختصر بينهم باستعمال الخاصيه عند القسمه تطرح الاسس)

مثال :-

$$1)\omega^{-2} \to \frac{1}{\omega^2} \to \frac{\omega^3}{\omega^2}=\omega^{3-2}=\omega$$

ملاحظه مهمه :- اذا جان عدنه اس ω (حدين حد الاول رقم وحرف والحد الثاني بس رقم الحل مباشر ناخذا ω اس الرقم ونطلع نتيجه

$$\omega^{9n+3}=\omega^3=1$$

امثله متنوعه حول الموضوع :- جد ناتج كلممايأتي

$1)\ (2+5\omega+5\omega^2)^3$ نستخرج عامل مشترك

$= [2+5(\omega+\omega^2)]^3 = [2+5(-1)]^3$

$(-3)^3 = -27$

$2)\ -4(2+\omega+2\omega^2)^9$ نستخرج عامل مشترك

$= -4[\omega+2(1+\omega^2)]^9 = -4[\omega-2\omega]^9$

$= -4(-\omega)^9 = -4(-\omega)^9 = 4$

مثال :- وزاري 2000د1/اثبت ان $\left(\frac{1}{1+\omega}-\frac{1}{1+\omega^2}\right)^2 = -3$

$\left(\frac{1}{-\omega^2}-\frac{1}{-\omega}\right)^2 = (-\omega+\omega^2)^2$

$= (-\omega)^2+2(-\omega)(\omega^2)+\omega^4 = \omega^2-2\omega^3+\omega$

$= \omega^2+\omega-2 = -1-2 = -3$

2-جد قيمة المقدار $(3-2w)^2+(3-2w^2)^2$

$sol\quad [9-12w+4w^2]+[9-12w^2+4w^4]$

$= 9-12w+4w^2+9-12w^2+4w$

$= -18-8w-8w^2 = 18-8(w+w^2) = 18+8 = 26$

مثال :- /جد قيمة المقدار الاتي

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{w}+3\sqrt{2}\,w+\sqrt{2}\right)^2\left(\frac{1}{w}+4w+1\right)$$

$$sol\quad \left(\frac{\sqrt{2}w^3}{w}+3\sqrt{2}w+\sqrt{2}\right)^2\left(\frac{w^3}{w}+4w+1\right)$$

$$= \left(\sqrt{2}w^2+3\sqrt{2}w+\sqrt{2}\right)^2(w^2+1+4w)$$

$$= \left(\sqrt{2}(w^2+1)+3\sqrt{2}w\right)^2(-w+4w)$$

$$= \left(-\sqrt{2}w+3\sqrt{2}w\right)^2(3w) = \left(2\sqrt{2}w\right)^2(3w)$$



$= 8w^3 * 3w = 24w^3 = 24$

مثال :-اثبت ان $4 + \frac{3}{1+w} + \frac{3}{1+w^2} = 7$

$sol \quad 4 + \frac{3}{1+w} + \frac{3}{1+w^2} = 7$

$4 + \frac{3}{-w^2} + \frac{3}{-w} = 4 - \frac{3w^3}{w^2} = \frac{3w^3}{w} = 4 - 3w - 3w^2$

$= 4 - 3(w + w^2) = 4 - 3(-1) = 4 + 3 = 7$

مثال / ضع المقادير بأبسط صورة

$1)\frac{1}{(1+\omega^{-32})^{12}}$

$= \frac{1}{\left(1+\frac{1}{\omega^{32}}\right)^{12}} = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{(\omega^3)^{10}\omega^2}\right)^{12}} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{\omega^2}\right)^{12}} = \frac{1}{(1+\omega)^{12}}$

$= \frac{1}{(-\omega^2)^{12}} = \frac{1}{\omega^{24}} = \frac{1}{1} = 1$

$2)(1+\omega^2)^{-4}$

$= \frac{1}{(-\omega)^4} = \frac{1}{\omega^4} = \frac{1}{\omega^3.\omega} = \frac{1}{\omega} = \omega^2$

مثال / أثبت أن

$1)\omega^7 + \omega^5 + 1 = 0$

L.H.S: $(\omega^7 + \omega^5 + 1) = (\omega^3)^2.\omega + \omega^3.\omega^2 + 1 = \omega + \omega^2 + 1 = 0 \quad = R.H.S$

$2)(5 + 3\omega + 3\omega^2)^2 = -4(2 + \omega + 2\omega^2)^3 = 4$

$(5 + 3\omega + 3\omega^2)^2 = \left(5 + 3(\omega + \omega^2)\right)^3 = (5-3)^2 = 4$

$$-4(2+\omega+2\omega^2)^3 = -4\left(\omega+2(1+\omega^2)\right)^3 = -(\omega-2\omega^2)$$
$$= 4\omega^3 = 4$$

مثال/ جد ناتج $\left(3\omega^{9n}+\frac{5}{\omega^5}+\frac{4}{\omega^4}\right)^6$

$$= \left(3(\omega^3)^{3n}+\frac{5}{\omega^3.\omega^2}+\frac{4}{\omega^3.\omega}\right)^6$$
$$= (3+5\omega+4\omega^2)^6$$
$$= (3-4+\omega)^6$$
$$= ((-1+\omega)^3 = [1-2\omega+\omega^2]^3 = [-\omega-2\omega]^3 = (-3w)^3$$
$$= -27\omega^3 = -27$$

مثال واجب / $\left(5-\frac{5}{\omega^2+1}+\frac{3}{\omega^2}\right)^6 = 64$

ملاحظة مهمه / اذا جان معاملات البسط والمقام متساويه بالكسر الواحد فطريقة الحل هي

1)نضرب احد الثوابت بـ ω^3 واذا جان بيه i نضرب بـ$(-i^2\omega^3)$

2)نستخرج عامل مشترك يكون اما ω^2 او ω من المقدار المضاف اليه بشرط يكون داخل القوس يشبه الاخر

3-نختصر المتشابهات بين البسط والمقام ونكمل العمليات الرياضيه لايجاد الناتج

مثال / أثبت أن $\left(\frac{5\omega+3}{3\omega^2+5}\right)^3 = 1$

$\left(\frac{5\omega+3}{3\omega^2+5}\right)^3$ نضرب احد الثوابت بـ ω^3

$$= \left(\frac{5\omega+3\omega^3}{3\omega^2+5}\right)^3$$ نستخرج عامل مشترك من البسط

$$= \left(\frac{\omega(5+3\omega^2)}{3\omega^2+5}\right)^3$$ نختصر المتشابه البسط و المقام

$$= (\omega)^3 = 1 \quad R.H.S$$



مثال :- اثبت ان $\left(\frac{5\omega^2 i-1}{5+i\omega}\right)^6 = -1$

$$L.H.S = \left(\frac{5\omega^2 i + i^2\omega^3}{5 + i\omega}\right)^6$$ باضافة للبسط $-i^2\omega^3$ للحد الخالي

$$= \left(\frac{\omega^2 i(5 + \omega i)}{5 + \omega i}\right)^6$$ اخراج عامل مشترك

$$= (\omega^2 i)^6 = \omega^{12} i^6 = -1 = R.H.S$$

مثال واجب "-برهن ان $\omega = \frac{7-5\omega}{7\omega^2-5}$

ملاحظه :- احنه دائما نستخدم خوص الاوميكا نعوض بمايساويها ونحل زين اذا لكيناها ومكدرنه نطبق خواص الاوميكا (هنا ع الاغلب نستعمل توحيد المقامات)

مثال :- جد المعادله التربيعيه التي جذراها lm حيث $l\ m \in c$ مترافقان حيث

$$L = \frac{w}{1 + 3w} \quad , M = \frac{w^2}{1 + 3w^2}$$

sol

$$L + M = \frac{w}{1 + 3w} + \frac{w^2}{1 + 3w^2}$$ مجموع الجذرين

$$= \frac{w(1 + 3w^2) + w^2(1 + 3w)}{(1 + 3w)(1 + 3w^2)}$$

$$= \frac{w + 3w^3 + w^2 + 3w^3}{1 + 3w^2 + 3w + 9w^3} = \frac{w + w^2 + 6w^3}{3w^2 + 3w + 1 + 9}$$

$$= \frac{-1 + 6}{3(w^2 + w) + 10} = \frac{5}{-3 + 10} = \frac{5}{7} \in R$$

$$L.M = \frac{w}{1 + 3w} \cdot \frac{w^2}{1 + 3w^2} = \frac{w^3}{7} = \frac{1}{7} \in R$$

$$x^2 - \frac{5}{7}x + \frac{1}{7} = 0$$ المعادله التربيعيه

مثال:-وزاري 1998د2/جد الجذر التربيعي للعدد $\frac{7+wi+w^2i}{1-wi-w^2i}$

$$\frac{7+i(w+w^2)}{1-i(w+w^2)}=\frac{7-i}{1+i}$$

$$=\frac{7-i}{1+i}*\frac{1-i}{1-i}=\frac{7-7i-i-i^2}{1+1}=\frac{7-8i-1}{2}$$

$$=\frac{6-8i}{2}=3-4i$$

$$(x+yi)^2=(3-4i)$$

$$x^2-y^2+2xyi=3-4i$$

$$x^2-y^2=3\ldots\ldots\ldots1$$

$$2xy=-4\rightarrow xy=-2\rightarrow x=\frac{-2}{y}\quad 2in1$$

$$\left(\frac{-2}{y}\right)^2-y^2=3\rightarrow\left[\frac{4}{y^2}-y^2=3\right]y^2$$

$$4-y^4=3y^2\rightarrow y^4+3y^2-4=0$$

$$(y^2+4)(y^2-1)=0$$

$y^2+4=0\rightarrow y^2=-4$ (تهمل)

$$y^2-1=0\rightarrow y^2=1\rightarrow y=\mp1$$

عندما $y=1\rightarrow x=\frac{-2}{1}\rightarrow -2+i$

عندما $y=-1\rightarrow x=\frac{-2}{-1}=2-i$

مثال / كتاب /كون المعادله التربيعيه التي جذراها

$a)\ 1-iw^2\,,\qquad 1-iw$

$sol\ (1-iw^2)+(1-iw)$

$$2-iw^2-iw=2-i(w^2+w)=2+i$$

$$(1-iw^2)(1-iw)=1-iw-1w^2+i^2w^3$$

$$=1-i(w+w^2)-1=-i(-1)=i$$



$x^2-(2+i)x+i=0$

$b)\ \frac{2}{1-w}+\frac{2}{1-w^2}$

$=\frac{2(1-w^2)+2(1-w)}{(1-w)(1-w^2)}=\frac{2-2w^2+2-2w}{1-w^2-w+w^3}$

$=\frac{2+2-2w^2-2w}{1+1-w^2-w}=\frac{4-2(w^2+w)}{2+1}=\frac{4+2}{3}=\frac{6}{3}=2$

$\frac{2}{1-w}\cdot\frac{2}{1-w^2}=\frac{4}{1-w^2-w+w^3}$

$=\frac{4}{1+1+1}=\frac{4}{3}$

$x^2-2x+\frac{4}{3}=0$

تمارين الخاصه بالاوميكا

س1/اكتب المقادير الاتيه في ابسط صوره

$a)\ w^{64}=w$

$b) w^{-325}=\frac{1}{w^{325}}=\frac{1}{w^{10}}=\frac{1}{w}=\frac{w^3}{w}=w^2$

$c)\ \frac{1}{[1+w^{-32}]^{12}}=\frac{1}{\left[1+\frac{1}{w^{32}}\right]^{12}}=\frac{1}{\left[1+\frac{1}{w^5}\right]^{12}}$

$=\frac{1}{\left[1+\frac{1}{w^2}\right]^{12}}=\frac{1}{[1+w]^{12}}=\frac{1}{[-w^2]^{12}}=\frac{1}{w^{24}}=\frac{1}{w^6}=\frac{1}{1}=1$

$d) (1+w^2)^{-4}=(-w)^{-4}=\frac{1}{(-w)^4}=\frac{1}{w^4}$

$=\frac{1}{w}=\frac{w^3}{w}=w^2$

$e) w^{9n+5} \quad , n \in n$

$= w^5 = w^2$

س2/كون المعادله التربيعيه التي جذراها

$a) 1 + w^2 \quad , 1 + w$

sol

$(1 + w^2) + (1 + w) = 2 + w^2 + w$

$= 2 - 1 = 1$

$(1 + w^2)(1 + w) = 1 + w + w^2 + w^3$

$= 1 - 1 + 1 = 1$

$x^2 - x + 1 = 0$

$b) \dfrac{w}{2 - w^2} \quad , \dfrac{w^2}{2 - w}$

$$\frac{w}{2 - w^2} + \frac{w^2}{2 - w} = \frac{w(2 - w) + w^2(2 - w^2)}{(2 - w^2)(2 - w)}$$

$$= \frac{2w - w^2 + 2w - w^4}{4 - 2w - 2w^2 + w^3} = \frac{2w + w^2 - w}{4 - 2w - 2w^2 + 1}$$

$$= \frac{w + w^2}{5 - 2(w + w^2)} = \frac{w - w - 1}{5 - 2(-1)} = \frac{-1}{7}$$

$$\frac{w}{2 - w^2} X \frac{w^2}{2 - w} = \frac{w^3}{4 - 2w - 2w^2 + w^3} = \frac{1}{7}$$

$$x^2 + \frac{1}{7}x + \frac{1}{7} = 0$$

$c) \dfrac{3i}{w^2} . \dfrac{-3w^2}{i}$

$$\frac{3i}{w^2} = \frac{3iw^3}{w^2} = 3wi$$

$$\frac{-3w^2}{i} = \frac{-3w^2}{i} . \frac{-i}{-i} = \frac{3w^2 i}{1} = 3w^2 i$$

$3wi + 3w^2 i = 3i(w + w^2)$ مجموع الجذرين



$= 3i(-1) = -3i$

$3wi * 3w^2i = 9w^3i^2 = 9(1)(-1) = -9$ ضرب الجذرين

$x^2 + 3ix - 9 = 0$ المعادله التربيعيه هي

س3/ اذا كان $z^2 + z + 1$ فجد قيمة

$$\frac{1 + 3z^{10} + 3z^{11}}{1 - 3z^7 - 3z^8}$$

sol

$z^2 + z + 1 = 0$

$a = 1, b = 1 \ , c = 1$

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow z = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 * 1 * 1}}{2 * 1}$$

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} \rightarrow z = -\frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

اما $z = w \rightarrow$ او $z = w^2$

$when \ z = w$

$$\frac{1 + 3z^{10} + 3z^{11}}{1 - 3z^7 - 3z^8} = \frac{1 + 3w^{11} + 3w^{11}}{1 - 3w^7 - 3w^8}$$

$$= \frac{1 + 3w + 3w^2}{1 - 3w - 3w^2} = \frac{1 + 3(w + w^2)}{1 - 3(w + w^2)} = \frac{1 + 3}{1 + 3}$$

$$= \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

$when \ z = w^2$

$$\therefore \frac{1 + 3z^{10} + 3z^{11}}{1 - 3z^7 - 3z^8} = \frac{1 + 3(w^2)^{10} + 3(w^2)^{11}}{1 - 3(w^2)^7 - 3(w^2)^8}$$

$$= \frac{1 + 3w^{20} + 3w^{22}}{1 - 3w^{14} - 3w^{16}} = \frac{1 + 3w^2 + 3w^4}{1 - 3w^5 - 3w^7}$$

$$= \frac{1 + 3w^2 + 3w}{1 - 3(w^2 + w)} = \frac{1 - 3}{1 + 3} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

س4/ اثبت ان

$$a)\ (\frac{1}{2 + w} - \frac{1}{(2 + w^2)^2} = -\frac{1}{3}$$

$$\left(\frac{1}{2 + w} - \frac{1}{2 + w^2}\right)^2 = \left[\frac{2 + w^2(2 + w)}{(2 + w)(2 + w^2)}\right]^2$$

$$= \left(\frac{2 + w^2 - 2 - w}{4 + 2w^2 + 2w + w^3}\right) = \left(\frac{w^2 - w}{4 + 2(w^2 + w) + 1}\right)^2$$

$$= \left(\frac{w^2 - w}{5 - 2}\right)^2 = \left(\frac{w^2 - w}{3}\right)^2 = \frac{w^4 - 2w^3 + w^2}{9}$$

$$= \frac{w + w^2 - 2}{9}$$

$$= \frac{-1 - 2}{9} = \frac{-3}{9} = \frac{-1}{9}$$

$$b)\ \frac{w^{14} + w^7 - 1}{w^{10} + w^5 - 2} = \frac{2}{3}$$

$$= \frac{w^{14} + w^7 - 1}{w^{10} + w^5 - 2} = \frac{w^5 + w - 1}{w^{10} + w^2 - 2}$$

$$= \frac{w^2 + w - 1}{w + w^2 - 2} = \frac{-1 - 1}{-1 - 2} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$$

$$C)\ \left(1 - \frac{2}{w^2} + w^2\right)\left(1 + w - \frac{5}{w}\right) = 18$$

$$sol\ L.H.S\ = \left(1 - \frac{2}{w^2} + w^2\right)\left(1 + w - \frac{5}{w}\right)$$

$$= \left(1 - \frac{2w^3}{w^2} + w^2\right)\left(1 + w + \frac{5w^3}{w}\right)$$

$$= (1 - 2w + w^2)(1 + w + 5w^2)$$



$$= (1 + w^2 - 2w)(1 + w - 5w^2)$$
$$= (-w - 2w)(-w^2 - 5w^2)$$
$$= (-3w)(-6w^2) = 18w^3 = 18 = R.H.S$$

$d)\ (1 + w^2)^3 + (1 + w)^3 = -2$

الطرف الايسر $(1 + w^2)^3 + (1 + w)^3 = (-w)^3 + (-w^2)^3$

$$= (-w)^3 + (-w)^6 = -1 - 1 = -2$$

س/ جد ناتج $\left[3w^{9n} + \frac{5}{w^5} + \frac{4}{w^4}\right]$

$$\left[3(w^3)^{3n} + \frac{5}{w^2} + \frac{4}{w}\right]^6 = \left[3(1) + \frac{5w^3}{w^2} + \frac{4w^3}{w}\right]^6$$
$$= [3 + 5w + 4w^2\ ]^6 = [3 + 5w + 4(-w - 1)]^6$$
$$= [3 + 5w - 4w - 4]^6 = [w - 1]^6 = [(w - 1)^2]^3$$
$$= (w^2 - 2w + 1)^3 = (-w - 2w)^3 = (-3w)^3$$
$$= (-3)^3 . w^3 = -27\ (1) = -27$$

بعض الاسئله الوزاريه الخاصه بالفصل الاول

س1:- ضع (3+2i)(-2+i) بالصوره العاديه ثم جد نظيره الضربي بالصوره العاديه ج\ $\frac{8}{65} + \frac{1}{65}i$

س2:- جد الصيغه الجبريه للعدد المركب $\left(\frac{3-i}{1+i}\right)^2$

س3:-جد الصيغه الجبريه للعدد المركب $\frac{(1-i)^{15}}{(1+i)^{14}}$

س4:- جد قيمه x,y الحقيقيتين اذا علمت ان $\frac{6}{x+yi}, \frac{3+i}{2-i}$ مترافقان

س5:- اذا كان x=2i-1 جد قيمه $x^2 + 2x + 6$

س6:- جد ناتج بالصيغه الديكارتيه $(3 + 4i)^2 + (5 - 3i)(1 + i)$

س7:- اذا كانت $x = 2 + 3i, y = 3 - i$ جد قيمه $x^2 + 2y^2$

س8/ اذا كان $a + bi = \frac{2+i}{1-i}$ اثبت ان $2(a^3 + b^3) = 7$

س9/ ضع المقدار $\frac{(1-i)^{13}}{64}$ بالصيغه العاديه للعدد المركب

س١٠/ $\left(\frac{2-i}{1+i}\right)x + (1-i)^3 y = \overline{(1+i)(2-3i)}$

س١١/ برهن صحه ماياتي $(1+i)^5 + (1-i)^7 = 4 + 4i$

س12:- اذا كان $\boldsymbol{c, d \in R}$ كان $\boldsymbol{c + di = \frac{7-4i}{2+i}}$ جد $\boldsymbol{\sqrt{2c - di}}$

س13 /أذا كان $x = 2 + \sqrt{3}i \, , y \, 2 - \sqrt{3}i$ أوجد $\omega^2 x^2 + \omega y^2$

س13/ جد الصيغة العادية للعدد المركب $\left(\frac{3-i}{1+i}\right)^2$

س14/ جد الصيغة العادية للعدد المركب $\left(1-\sqrt{3}i\right)^2 - \left(2-\sqrt{3}i\right)^2$

س15 / ضع المقدار $\frac{(1-i)^{13}}{64}$ بالصيغة العادية ؟

س16 /جد قيمتي x,y الحقيقيتين التي تحقق $(2 + xi)(-x + i) = \frac{9y^2+49}{3y+7i}$

س17/ جد الجذور التكعيبية للعدد المركب $(1+i)^2$ على وفق مبرهنه ديموفر

س18/ جد قيمة x,y الحقيقية أذا كانت $\sqrt{\frac{\omega^2 i + i}{\omega^2}} = \omega x + \omega y i$ ؟

س19 /جد قيمة x,y الحقيقية التي تحقق $(3x + 2yi)^2 = \frac{200}{4+3i}$

س20/جد الناتج بالصيغة الديكارتية $(3 + 4i)^2 + (5 - 3i)(1 + i)$





أسئلة أثرائية على الصيغة القطبية ومبرهنه ديموافر

س1\ أحسب $[\sqrt{2}(\cos\frac{4\pi}{3}+isin\frac{4\pi}{3}]^{6}$

س2\ضع بأبسط صورة $(\cos 6\theta - isin6\theta)$ $(\cos\theta + isin\theta)^4$ ج/ $cos2\theta - isin2\theta$ ؟

س3 /بسط $\frac{(cos3\theta-isin3\theta)^2}{(cos2\theta+isin2\theta)^{-2}} * (cos2\theta + isin2\theta)^2$ ؟

س4\ أوجد الصيغة القطبية $(2+2\sqrt{2}i)^{\frac{3}{2}}$ ؟

س5 / حل المعادلة $x^3 = \frac{2-\sqrt{2}i}{1+\sqrt{-2}}$ بأستخدام مبرهنة ديموافر ؟

س6/ حل المعادلة $x^3 - 64i = 0$ بأستخدام مبرهنه ديموافر ؟

س7/ جد العدد المركب الذي مقياسه 2 السعة $\frac{11\pi}{3}$ ؟

س8/ جد العدد المركب الذي جزئة الحقيقي يساوي $\sqrt{2}$ والقيمة الاساسية للسعة $\frac{\pi}{4}$ ؟

س9 / عدد مركب مقياسة 5 وجزئه التخيلي يزيد عن جزءه الحقيقي بمقدار واحد جد العدد المركب ؟

س10\ ليكن $z = \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^5$ فجد المقياس والقيمة الاساسية للسعة ؟

س11/ حل المعادلة $x^2 + 4 = 0$ بأستخدام ديموافر ؟

س12/ عددان مركبان مترافقان مجموعهما (-2) والسعة الاساسية لأحدهما $\frac{3\pi}{4}$ جد العددان ؟

س13/ أذا كان $a + bi = \frac{4(1+i^5)}{(1-i)^5}$ فجد بأستخدام مبرهنه ديموافر $(a+bi)^2$؟

س14/ حل المعادلة $x^4 + 1 = 0$ بأستخدام مبرهنه ديموافر ؟

س15 / جد الصيغة القطبية للعدد المركب $z = \frac{(2-2i\omega-2i\omega^2)^{100}}{(2+2iw+2iw^2)^{101}}$ للفرع التطبيقي



تم اعداد الملزمة الاستاذ حمزة حازم الكربلائي

اسئل الله ان يوفقنا ويوفقكم

للاستفسار 07828808092

وتجدونا عبر قناة التلكرام @hamzafi



اعداد الاستاذ حمزة حازم الكربلائي

للصف السادس العلمي

بفرعيه الاحيائي و التطبيقي

07828808092

بسم الله الرحمن الرحيم ...

الفصل الثاني. شنو الفصل الثاني شبي من مواضيع. جكد درجته وزاري

الفصل الثاني هو فصل عبارة عن ثلاث مواضيع (قطع مكافئ – قطع ناقص-قطع زائد)

درجتة بالوزاري (20 درجة)

هذني القطوع مره تلكيهم كل واحد وحده (يعني وحدة بالسؤال) ومره تلكيهم مجتمعين (يعني ربط بين قطعين) فاحنه مانطول اكثر ندخل في الموضوع الاول

مفاهيم القطع المخروطي

1)نقطة ثابتة تسمى البوره 2)مستقيم معلوم يسمى الدليل 3) الاختلاف المركزي (e)





قطع مكافئ	قطع ناقص	قطع زائد
$e=1$	$e<1$	$e>1$

القطـــــــــع المكافــــــــئ :- ((شبي؟؟))

هو مجموعه من النقاط M(x,y) في المستوي التي يكون بعد كل منها عن نقطة ثابتة F(p,0) تسمى البؤرة وهاي البؤرة تكون مساوية للبعد عن مستقيم معلوم الي هو رمزة D نصيحله دليل

هسة اخذنة تعريف عنه هسة راح انطيك القطع المكافئ مكوناته شنو، وشنو اقسامه

- مكونات القطع المكافئ بي
- 1-معادلة 2-بؤرة 3-معادلة الدليل 4-رسم القطع

اقسام القطع المكافئ

1- قطع مكافيء سيني موجب

2- قطع مكافئ سيني سالب

3- قطع مكافئ صادي موجب

4- قطع مكافئ صادي سالب



كل قسم بي المكونات الفوك من ينطي سؤال نشوفه ياقسم (علمود نستخدم مكونات القسم الخاص بي)

مكونـــــــــات اقسام القطع المكافئ

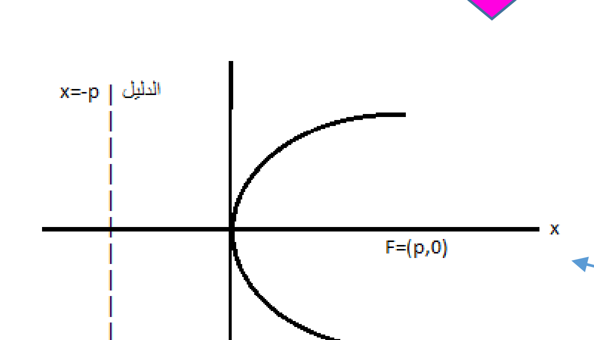
القطع المكافئ السيني الموجب -

1- المعادلة هي $y^2 = 4px$

2- البؤرة هي F(p,0)

3- معادلة الدليل x=-p

4- الرسم بهل الشكل



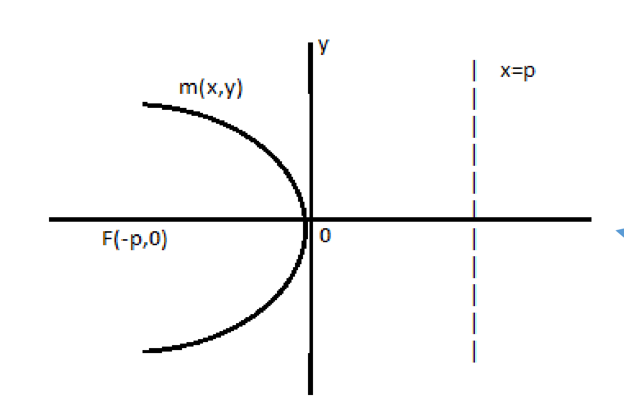
2- القطع المكافئ السيني السالب

1- المعادلة هي $y^2 = -4px$

2- البؤرة هي F(-p,0)

3- معادلة الدليل x=p

4- الرسم بهل شكل



3-القطع المكافئ الصادي الموجب

1- المعادلة هي $x^2 = 4py$

2- البؤرة هي F(0,p)

3- معادلة الدليل y=-p

4- الرسم بهل شكل

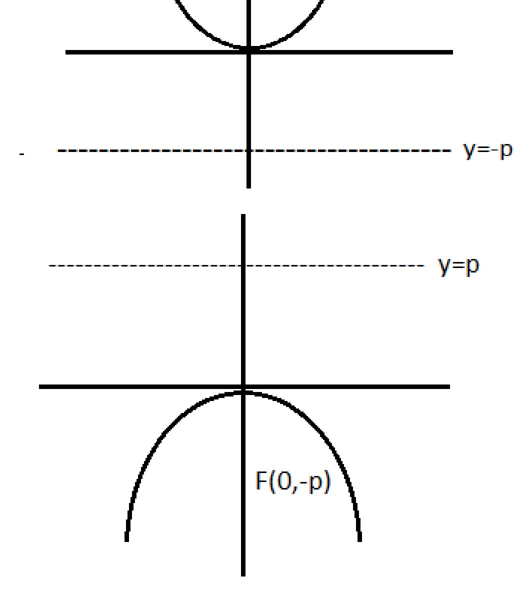
4-القطع المكافئ الصادي السال ب

1- المعادلة هي $x^2 = -4py$

2- البؤرة هي F(0,-p)

3- معادلة الدليل y=p

4- الرسم بهل شكل



ملاحظه:- 1-البوره دائما تكون عكس اشاره الدليل

2- اذا نريد نطلع معادله قطع مكافئ لازم نطلع 1- مكان (موقع) البؤره 2- قيمه p

مثال :- جد البؤرة ومعادلة الدليل للقطع المكافئ $y^2 = -8x$

من المعادلة الي بالسؤال نعرف نوع القطع (علمود نستخدم معادلة الخاصة بيه) ونحل

$y^2 = -8\ x$

$y^2 = -4p\ x$ بالمقارنة مع المعادلة القياسية

$4p = 8 \rightarrow p = 2$

$\therefore F(-p,0)$ البؤرة $\rightarrow$ $F(-2,0)$] البؤرة

$\therefore x = p$ معادلة الدليل $\rightarrow \therefore x = 2$

تقريباً أغلب الأسئلة الي بهل صيغة تحل على هذا النمط

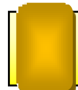
ملاحظة مهمة جدا :- الp دائما موجبة دائما واذا طلعت عندك سالبة يعني خطأ بالحل





ملاحظـــــــات هامـــــة لحـــل الأسئـــلة

1- من ينطي البؤرة مباشرة استخرج قيمة p من عدها وكتب المعادلة الخاصة بالسؤال (من خلال البؤرة عرفت نوع القطع) شوف المثال



مثال :-جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل وبؤرته (3,0)

$F(3,0)$

$sol:.F(3,0) \rightarrow :.p=3$

$y^2=4px$ المعادله القياسية

$:.y^2=4(3)x \rightarrow y^2=12x$

2- اذا انطاني معادله دليل فالبؤره مالتي هو نفسه معادله الدليل بعكس الاشاره (مهم)

(المسافه بين بؤره القطع المكافئ ودليله =2p) مهمه جدا (نشوف المثال)

مثال:- جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل ومعادلة الدليل 2x-6=0

$2x-6=0 \rightarrow 2x=6 \rightarrow x=3$

$p=3$

$y^2=-4px$ المعادلة القياسية

$y^2=-4(3)x$ المعادلة هي

$y^2=-12x$

3- كل ما يذكر لك كلمة (يمر ينتمي) ويذكر وياها نقطة هاي النقطة تحقق معادلة ولازم يذكرلك المحور يحدد اذا ماحدد تاخذ احتمالين

مثال \\ جد معادلة القطع المكافئ في الحالات التالية

1) يمر بالنقطة (4 ، 2) وبؤرته تقع على محور السينات x axis ورأسه نقطة الاصل ؟

معادلة القطع المكافئ $y^2 = 4px \Rightarrow (4)^2 = 4p(2) \Rightarrow 16=8p \Rightarrow p = 2 \therefore y^2 = 8x$

2) يمر بالنقطة (4- ، 1-) وبؤرته تقع على محور الصادات y axis ورأسه نقطة الاصل ؟

المعادلة $x^2 = -4py \Rightarrow (-1)^2 = -4p(-4) \Rightarrow 1 = 16p \Rightarrow p = \frac{1}{16} \therefore x^2 = -\frac{1}{4}y$

3) يمر بالنقطة (6 ، 2-) ورأسه نقطة الاصل ؟

الاحتمال الاول *** البؤرة تقع على المحور السيني السالب

معادلة القطع $y^2 = -4px \Rightarrow (6)^2 = -4p(-2) \Rightarrow 36= 8p \Rightarrow p = \frac{9}{2} \therefore y^2 = -18x$

الاحتمال الثاني *** البؤرة تقع على المحور الصادي الموجب

المعادلة $x^2 = 4py \Rightarrow (-2)^2 = 4p(6) \Rightarrow 4 = 24p \Rightarrow p = \frac{1}{6} \therefore x^2 = \frac{2}{3}y$

4- اذا مر القطع المكافئ بنقطتين راح ناخذ وحدة منهم ونطبق نفس الخطوات الفوك بس شلون نعرف نوع المعادلة سيني لو صادي شوف (بالنقطتين لازم اكو رقم متشابه بالاشارة والرقم المعادلة تقع على نفس المحور الي عليه الرقم شوف المثال)

مثال :- جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر بالنقطتين (2,4),(2,-4) ورأسهُ نقطة الاصل

[التشابه بالمحور السينات متساوي بالنقطتين]

:. القطع المكافئ يقع على محور السينات الموجب

:. المعادلة هي $y^2 = 4px$

هسه نعوض نقطة وحدة بـــــسٍ تحقق معادلته

$(4)^2 = 4p(2) \rightarrow 16 = 8p$

$p = 2$

المعادلة هي $y^2 = 4(2)x \rightarrow y^2 = 8x$



5- اذا مر دليل القطع المكافئ بنقطة اذا كلك يقع على محور السينات راح نكول (المسقط الاول او الرقم الاول من النقطة=x) اذا كلك يقع على محور الصادات راح نكول (المسقط الثاني او الرقم الثاني من النقطة=y) من نستخرج الدليل معناه استخرجت البؤرة لان هي عكس اشاره الدليل

مثال :- جد معادلة القطع المكافئ الذي دليله يمر بالنقطة (-2,-3) ويقع على محور الصادات

ذاكر محور الصادات فراح نكتب معادله الصادات خوش

/Sol

.: معادله الدليل هي $y = -3 \leftarrow p = 3$

المعادله هي $x^2 = 4py \leftarrow x^2 = 4(3)y$

$x^2 = 12y$

6-اذا مر الدليل بنقطتين شنو نسوي شوف لو نكول

الرقم المتساوي من النقطتين =x لو نكول الرقم المتساوي من النقطتين= y

مثال // جد معادلة القطع المكافئ في الحالات التالية

1) دليله يمر بالنقطتين (1 ، -3) ، (9 ، -3) ورأسه نقطة الاصل ؟

الحل:- معادلة الدليل هي $x = -3$ أي ان $p = 3$

$\therefore F(3,0) \Rightarrow y^2 = 4px \Rightarrow y^2 = 12x$ (معادلة القطع المكافئ)

7- من ينطي معادلة مستقيم نستخرج منه الدليل لو x لو y بس شلون شوف اذا ذكر يتقاطع مع الصادات معناها x=0 و اذا ذكر السينات معناها y=0 شوف المثال

جد معادله القطع المكافئ دليله يمر بنقطة تقاطع المستقيم $2x + 3y = 12$ مع محور الصادات y axis ورأسه نقطة الاصل؟

الدليل $x = 0$ عندما $\Rightarrow 3y = 12 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow (0,4) \in$

$F(0,-4) \Rightarrow p = 4 \Rightarrow x^2 = -4py \Rightarrow x^2 = -16y$ (معادلة القطع المكافئ)

ملاحظة :- مهمه جدا

من يذكر الك ان الاختلاف المركزي e للقطع يساوي 1 نعرف هذا قطع مكافئ
e=1

مثال:- جد معادلة القطع المخروطي الذي بؤرته F(3,0) وأختلافهُ المركزي e=1 واجب

ملاحظة:- معامل المتغير التربيعي مال معادلة القطع المكافئ لازم 1 يعني اذا اكثر من واحد لازم نتخلص منه شوف المثال

$3x^2 - 24y = 0$

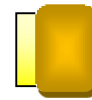
$[3x^2 = 24y\,] \div 3 \rightarrow x^2 = 8y$

$x^2 = 4py$ بالمقارنة مع المعادلة القياسية

$4p = 8 \rightarrow p = 2$

$F\,(0,2) \therefore \leftarrow F(0,p)$ البؤرة هي ∴

$y = -2 \therefore \leftarrow y = -p$ معادلة الدليل ∴



مثال :-جد معادلة القطع المكافئ اذا علمت ان

1) $F(5,0)$

$sol\; F(5,0) \rightarrow \therefore p = 5$

$y^2 = 4px$ المعادلة القياسية

$\therefore y^2 = 4(5)x \rightarrow y^2 = 20x$

2-معادله الدليل y=7

$y = 7 \rightarrow p = 7$

$x^2 = -4\,py$ المعادله القياسيه

$x^2 = -4\,(7)y \rightarrow x^2 = -28\,y$

مثال :- اذا كانت $y^2 = (4h - 5)x$ معادلة قطع مكافئ دليله يمر بالنقطه (2,3-) فجد قيمة h

∴ معادلة القطع المكافئ هي

$y^2 = (4h - 5)x$

∴ القطع المكافئ يمر بالنقطة (2,3-)

$x = -2 \rightarrow p = 2$



∴ المعادلة القياسية هي $y^2 = 4px$

$\therefore y^2 = 4(2)x \to y^2 = 8x$
$4h - 5 = 8 \to 4h = 8 + 5 \to 4h = 13$
$\therefore h = \frac{13}{4}$

ملاحظة:- اذا كلك الدليل يوازي احد المحاور مثلا يوازي محور السينات فراح يكون عند (البؤرة والدليل يقعان على محور الصادات) والبعكس

مثال:- جد معادلة القطع المكافئ الذي دليله يمر بالنقطة (2,-1) ودليله يوازي محور الصادات

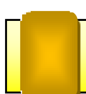
:-الدليل يوازي محور الصادات

∴ البؤرة والدليل يقعان على محور السينات

$x = 2 \to p = 2$
$y^2 = -4px$ المعادلة القياسية هي
$y^2 = -4\,(2)x \to y^2 = -8x$

رسـم القطـع المكافئ

بصورة مبسطه بدون خطوات أنت تعرف رسم كل قسم من اقسام القطع الاربعة مجرد تجيب الرسم وتأشر البؤرة والدليل واذا تطلع نقطة هم تأشرها وتكدر علمود يطلع الرسم ادق ناخذ من عندك قيم لـx تعوضها بالمعادلة تطلع y شوف المثال



مثال :- جد بؤرة ومعادلة دليل القطع المكافئ $y^2 = 4x$ ثم أرسمه

/Sol المعادلة القياسية $y^2 = 4px$

$4p = 4 \rightarrow p = 1$

x	0	1	2
y	0	-+2	$\mp 2\sqrt{2}$

البؤرة هي F(1,0)

معادله الدليل:. X=-1

x=-1 الدليل

(1,2)

(2,2)

F(1,0)

(1,-2)

(2,-2)

ايجـاد معادلة القطع المكافئ بالتعريف

1- هاي العلاقة الي نشتغل عليها MF=MQ ال M هي نقطة ∋ للقطع M(x,y) F هي البؤرة Q نقطة ∋ للدليل

2- نربع الطرفين علمود نتخلص من الجذور

3- نفتح الاقواس

4- نختصر

5- الحد الي بيه تربيع يبقه ثابت بالطرف الايسر والباقي ينقل للطرف الايمن



ملاحظه/ القانون الرئيسي للحل هو قانون المسافة بين نقطتين

ملاحظه/Q هي نفسها البؤرة بمجرد الحد الثاني تقلبه متغير والحد الاول تغير اشارته

F(0,3) Q(x,-3)

مثال:-باستخدام التعريف جد معادله القطع المكافيء الذي

بؤرته $(\sqrt{3},0)$ والراس نقطه الاصل .

Sol: $\rightarrow F(\sqrt{3},0) \rightarrow Q(-\sqrt{3},y)$

$$\therefore MF = MQ$$

$$\sqrt{(x2-x1)^2+(y2-y1)^2} = \sqrt{(x^2-x1)^2+(y2-y1)^2}$$

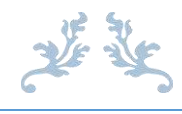
$$\sqrt{\left(x-\sqrt{3}\right)^2+(y-0)^2} = \sqrt{\left(x+\sqrt{3}\right)^2+(y-y)^2}$$

$$\sqrt{x^2-2\sqrt{3}x+3+y^2} = \sqrt{x^2+2\sqrt{3}x+3}$$ تربيع الطرفين

$$x^2-2\sqrt{3}x+3+y^2 = x^2+2\sqrt{3}x+3$$

$$\therefore y^2-2\sqrt{3}x = 2\sqrt{3}x \rightarrow y^2 = 2\sqrt{3}x+2\sqrt{3}x$$

$y^2 = 4\sqrt{3}x$ معادله القطع المكافئ



تمارين (2-1)

س1/ جد معادله القطع المكافئ في كل مما ياتي ثم ارسم المنحني البياني لها

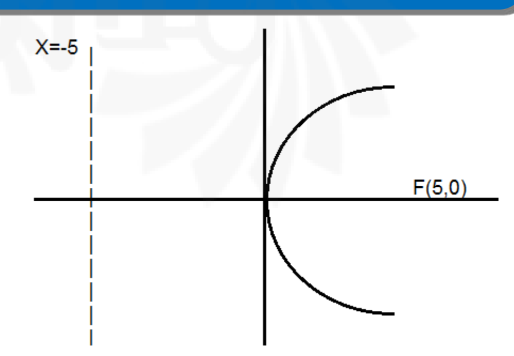
أ- البؤره F(5,0) والراس نقطه الاصل

Sol/

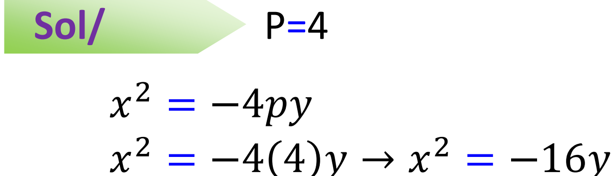
$$P = 5$$

$$y^2 = 4px$$

$$y^2 = 4(5)x \rightarrow y^2 = 20x$$

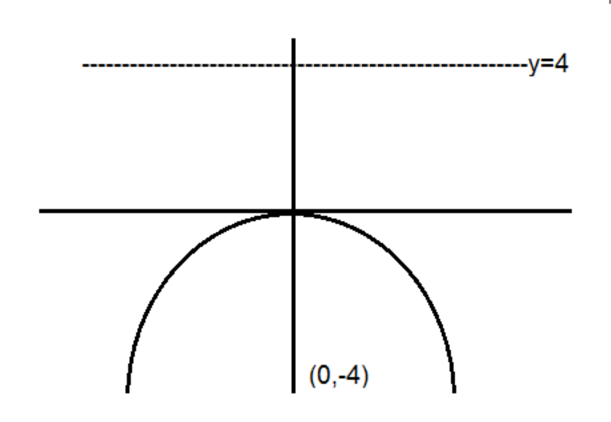


ب-البؤرة (0,-4) والراس نقطة الاصل .



Sol/ P=4

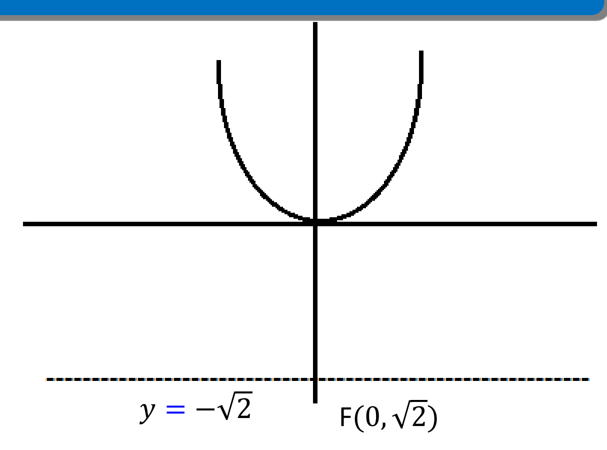
$$x^2 = -4py$$
$$x^2 = -4(4)y \rightarrow x^2 = -16y$$



ج-البؤرة $(0, \sqrt{2})$ والرأس نقطة الاصل .

Sol\

$$p = \sqrt{2}$$
$$x^2 = 4py$$
$$x^2 = 4\sqrt{2}y$$

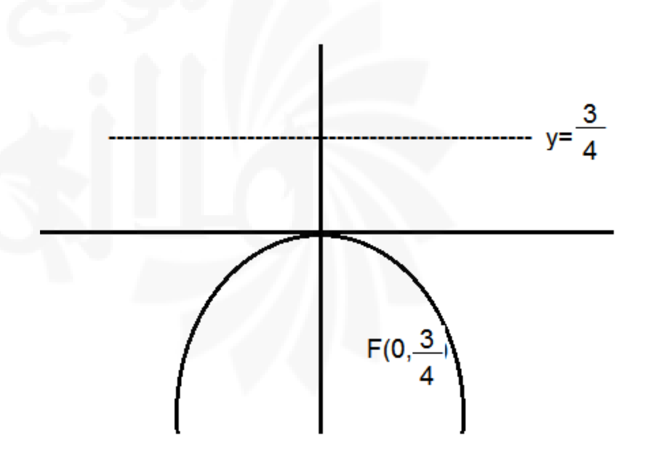


د-معادلة دليل القطع المكافئ 4y-3=0 والرأس نقطة الاصل .

sol:

$$4y - 3 = 0 \rightarrow 4y = 3 \rightarrow y = \frac{3}{4} \text{ معادلة الدليل } \rightarrow ..p = \frac{3}{4}$$

$$x^2 = -4py$$
$$x^2 = -4\left(\frac{3}{4}\right)y \rightarrow x^2 = -3y$$
$$F\left(0, \frac{-3}{4}\right) \text{ البؤرة}$$





س2/في كل مما يأتي جد البؤرة والرأس ومعادلتي المحور والدليل للقطع المكافئ

$a)\ x^2 = 4y$

$x^2 = 4py$

$4p = 4 \to p = 1 \to F(0,1)$

$y = -1$ معادلة الدليل

$x = 0$ معادلة المحور

$b) 2x + 16y^2 = 0$

sol\ $2x + 16y^2 = 0 \to 16y^2 = -2x \to y^2 = \frac{-1}{8}x$

$y^2 = -4px$

$4p = \frac{1}{8} \to 32p = 1 \to p = \frac{1}{32}$

$F\left(\frac{-1}{32}, 0\right)$ البؤرة

$(0,0)$ الراس

$x = \frac{1}{32}$ معادلة الدليل

$y = 0$ معادلة المحور

س3/جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر بالنقطتين (2, 5) (2,-5) والرأس في نقطة الاصل

المعادلة القياسية $y^2 = 4px$

(2,-5) تحقق معادلة القطع المكافئ

$y^2 = 4px \to (-5)^2 = 4p(2) \to 25 = 8p \to p = \frac{25}{8}$

$\therefore y^2 = \frac{25}{2}x$

س4/ اذا كان دليل القطع المكافئ يمر بالنقطة (-3,4) والراس في نقطة الاصل جد معادلته علما ان بؤرته تنتمي لأحد المحورين ؟

نأخذ احتمالين لان ممحدد الي يامحور علمود نختار المعادلة المناسبة

1-اذا كانت معادلة الدليل $x = -3 \to p = 3$

المعادلة القياسية $y^2 = 4px$

معادلة القطع المكافئ $y^2 = 4(3)x \to y^2 = 12x$

2-اذا كانت معادلة الدليل $y = 4 \to p = 4$

المعادلة القياسية $x^2 = -4py$

$$x^2 = -4(4)y \to x^2 = -16y$$

س5/ اوجد قيمة A وبؤرة ودليل القطع المكافئ الذي معادلتهُ $Ax^2 + 8y = 0$ ويمر بالنقطة (1,2) ثم أرسم القطع ؟

Sol/ كل نقطة يمر بيها القطع (1,2) تحقق معادلته

$$A(1)^2 + 8(2) = 0 \to A + 16 = 0 \to A = -16$$

$$[-16x^2 + 8y] \div (-16) \to x^2 = \frac{1}{2}y$$

المعادلة القياسية $x^2 = 4py$

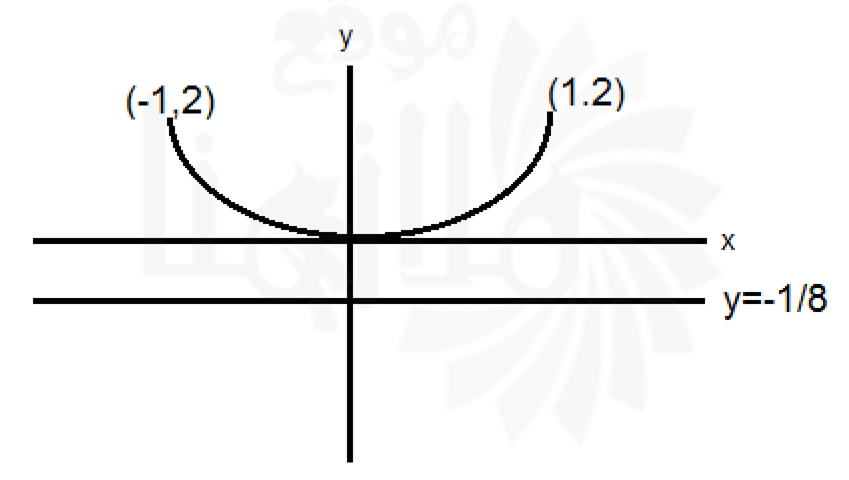
$$4p = \frac{1}{2} \to 8p = 1 \to p = \frac{1}{8}$$

البؤرة $\left(0, \frac{1}{8}\right)$ ومعادلة الدليل $y = \frac{-1}{8}$

لرسم القطع المكافئ نحتاج نقطتين او اكثر على شكل ازواج مرتبه

النقطة $(0,0)$ $y = 0 \to x^2 = \frac{1}{2}(0) = 0$

x	y	(x,y)
1	2	(1,2)
-1	2	(-1,2)





س6/باستخدام التعرف جد معادلة القطع المكافئ في الحالات التالية

أ-البؤرة (7,0) والراس نقطة الاصل

Sol

Mp=MF

$$\sqrt{(x-7)^2+(y-0)^2}=\sqrt{(x+7)^2+(y-y)^2}$$

$$\sqrt{(x^2-14x+49+y^2)}=\sqrt{x^2+14x+49}$$ تربيع الطرفين

$$x^2-14x+49+y^2=x^2+14x+49$$

$$y^2=28x$$

ب-معادلة الدليل $y=\sqrt{3}$ والرأس نقطة الاصل

.: معادله الدليل $y=\sqrt{3}\leftarrow p=\sqrt{3}\leftarrow F(0,,\mp\sqrt{3})$

$$Mp=MF$$

$$\sqrt{(x-0)^2+\left(y+\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{(x-x)^2+\left(y-\sqrt{3}\right)^2}$$

$$\sqrt{x^2+y^2+2\sqrt{3}y+3}=\sqrt{y^2-2\sqrt{3}y+3}$$ تربيع الطرفين

$$x^2+y^2+2\sqrt{3}y+3=y^2-2\sqrt{3}y+3$$

$$x^2=-2\sqrt{3}y-2\sqrt{3}y\rightarrow x^2=-4\sqrt{3}y$$

القطع الناقص

شنو القطع الناقص؟ هو مجموعة من النقاط بالمستوي الي يكون مجموع بعد اي نقطتين معلومتين يساوي عدد حقيقي ثابت ونرمز له 2a

هسه نجي ننطي معلومات عن القطع الناقص ---- القطع الناقص بي معادلتين سيني وصادي وكذلك كل محور بي (بؤرة ورأس وقطب)

نجي نكتبهم وحده وحده (ركـــــــــزلي هنـــــــــــا)



1- اذا جان القطع سيني

1 – المعادلة هي $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

2 – البؤرتان هما $F1(c,0)F2(-c,0)$

3 – الرأسان هما $V1(a,0),V2(-a,0)$

-4 القطبان M1(0,b),M2(0,-b)



2-اذا جان القطع صادي

1 – المعادلة هي $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

2 – البؤرتان هما $F1(0,-c)F2(0,-c)$

3 – الرأسان هما $V1(0,a),V2(0,-a)$

-4 القطبان M1(b,0),M2(-b,0)

شغلات مشتركة بين المعادلتين

-a طول المحور الكبير (نصيحلة العدد الثابت) =2a

-b طول المحور الصغير =2b

-c البعد او المسافة بين البؤرتين = 2c

-d العلاقة بين a,b,c علاقة حلال المشاكل اغلب الأمثلة تحتاجها (بكل عزة لطامة)

$$a^2=b^2+c^2 \quad a>b \quad a>c$$

-F الاختلاف المركزي $e=\frac{c}{a}$

والاختلاف المركزي دائما اصغر من الواحد الصحيح يعني ((من يذكر سؤال جد معادلة القطع المخروطي الذي أختلافه المركزي ...... أو منطي اقل من الواحد تجي قبل للقطع الناقص)

-g مساحه القطع الناقص= $A=ab\pi$

-h محيط القطع الناقص = $P=2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$



امثلـه عن القطـع الناقـص

مثال كتاب :- في كل مما يأتي جد طول كل من المحورين والرأسين والبؤرتين والاختلاف المركزي

1) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

/sol بالمقارنة مع بالمعادلة القياسية

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

ملاحظة :- مهمة جدا شلون عرف هاي المعادلة ع السينات شوف الرقم الاكبر دائما يمثل a^2 واذا جان جوه x معناه المعادلة سينات ونطبق واذا جان جوه y معناه صادات ونطبق

$a^2=25\rightarrow a=5$ أخذنا من المعادلة

$b^2=16\rightarrow b=4$ أخذنا من المعادلة

نطبق علاقة حلال المشاكل علمود نطلع قيمة c الي هي البؤرة

$c^2=a^2-b^2\rightarrow c^2=25-16\rightarrow c^2=9\rightarrow c=3$

$V1(a,0),V2(-a,0)$ الرأسان هما

$V1(5,0),V2(-5,0)$

$M1(0,b),M2(0,-b)$ القطبان

$M1(0,4),M2(0,-4)$

$F1(c,0),F2(-c,0)$ البؤرتين

$F1(3,0),F2(-3,0)$

وحدة طول $2a=2(5)=10$ طول المحور الكبير

وحدة طول $2b=2(4)=8$ طول المحور الصغير

$e=\frac{c}{a}=\frac{3}{5}<1$ اختلاف المركزي

$2) 4x^2 + 3y^2 = \frac{4}{3}$

/Sol نضرب طرفي المعادلة في $\frac{3}{4}$ علمود الطرف الايمن يساوي 1 لازم بكل معادلة

$\left(\frac{3}{4}\right) 4x^2 + \frac{3}{4}\, 3y^2 = \frac{3}{4} * \frac{4}{3}$

$3x^2 + \frac{9y^2}{4} = 1$

شلون نزلت 9 جوه 4 وشلون نزلت 3 احنه نعرف شغلة المقام، المقام في البسط رجعنا لحالته

$\frac{x^2}{\frac{1}{3}} + \frac{y^2}{\frac{4}{9}} = 1$

$\frac{4}{9} > \frac{1}{3}$

$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ نقارن المعادلة القياسية $\therefore$

$a^2 = \frac{4}{9} \to a = \frac{2}{3} \qquad b^2 = \frac{1}{3} \to \mathrm{b} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$V1\left(0, \frac{2}{3}\right), V2\left(0, -\frac{2}{3}\right)$ الرأسان هما

$2a = 2\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}$ طول المحور الكبير

$2\mathrm{b} = 2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}$ طول المحور الصغير

$c^2 = a^2 - b^2 = \frac{4}{9} - \frac{1}{3} = \frac{4-3}{9} \to c^2 = \frac{1}{9}$

$\therefore c = \frac{1}{3}$

$F1\left(0, \frac{1}{3}\right), F2\left(0, \frac{-1}{3}\right)$ البؤرتان هما



ملاحظة:- من يكلك طولا محوريه ويذكر رقمين الك (الرقم الجبير 2a) (الرقم الصغير 2b) ومنهم نطلع a,b وال c من علاقة حلال المشاكل

مثال :- جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل و طولا محوريه 8,10 وحدة طول وبؤرتاه على محور السينات

sol\ $2a = 10 \rightarrow a = 5 \quad 2b = 8 \rightarrow b = 4$

$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ معادلة القطع الناقص

مثال:- واجب ـــ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل ويقطع جزء من محور السينات طوله 8 وحدة وجزء من محور الصادات جزء طوله 12 وحدة طول ثم جد مساحته ومحيطه

مثال كتاب :-جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه F1(3,0) ,F2(-3,0) ورأساه النقطتان V1(5,0),V2(-5,0) ومركزه نقطة الاصل

/Sol

$F2(-3,0), F1(3,0)$ من البؤرة $\rightarrow c = 3 \rightarrow c^2 = 9$

$V1(5,0), V2(-5,0)$ من الرأس $\rightarrow a = 5 \rightarrow a^2 = 25$

$b^2 = a^2 - c^2 \rightarrow b^2 = 25 - 9 \rightarrow b^2 = 16$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ المعادلة من النوع

$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ المعادلة هي

مثال كتاب :-لتكن $kx^2 + 4y^2 = 36$ معادلة قطع ناقص مركزه نقطة الاصل وأحدى بؤرتيه $(\sqrt{3}, 0)$ فجد قيمة k

$(\sqrt{3}, 0)$ البؤرة $= (c, 0) \rightarrow c = \sqrt{3}$

$[kx^2 + 4y^2 = 36] \div 36 \rightarrow \frac{kx^2}{36} + \frac{4y^2}{36} = 1$

$$\frac{x^2}{\frac{36}{k}}+\frac{y^2}{9}=1 \to b^2=\frac{36}{k}, \qquad a^2=9 \quad ,c=\sqrt{3}$$

$$a^2=b^2+c^2 \to 9=\frac{36}{k}+3$$

$$\frac{36}{k}=6 \to 6k=36 \to k=6$$

ملاحظة مهمة :- من يذكر (فرق بين طولي محوريه) العلاقة تكون

(الرقم المعطى= 2a-2b) هاي اذا جان الرقم الي نطاه الي موجب اذ الرقم سالب راح يكون (الرقم المعطى=2b-2a) من يذكر عباره (مجموع طوليه محوريه (الرقم المعطى= 2a+2b)

مثال كتاب :-جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه على محور السينات والمسافة بين البؤرتين 6 وحدات والفرق بين طولي محوريه يساوي 2 وحده

Sol/

$$2c=6 \to c=3 \to c^2=9$$

$$[2a-2b=2] \div 2 \to a-b=1 \to a=b+1$$

$$a^2=b^2+c^2$$ حلال المشاكل

$$(b+1)^2=b^2+9$$

$$b^2+2b+1=b^2+9 \to 2b=9-1 \to 2b=8$$

$$b=4 \to b^2=16$$

$$a=b+1 \to a=4+1 \to a=5 \to a^2=25$$

$$\therefore \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$$ المعادلة القطع الناقص



مثال:- جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل واحدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ $y^2 - 12x = 0$ وطول محوره الصغير يساوي 10 وحدات

\Sol

كلك البؤره مال الناقص هي نفسها مال المكافئ ومنطيك معادله المكافئ فنروح لمعادلة المكافئ نحلها ونطلع بؤرتها هي نفسها مال الناقص

طول المحور الصغير = 2b

$y^2 - 12x = 0 \rightarrow y^2 = 12x$ نقارن $\rightarrow y^2 = 4px$

$4p = 12 \rightarrow p = 3$

بؤرة المكافئ$(3,0)$

بؤرة الناقص $\rightarrow (3,0)$لان نفسها مال المكافئ

$2b = 10 \rightarrow b = 5 \quad ,c = 3$

$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow a^2 = 25 + 9 \rightarrow a^2 = 34$

$\frac{x^2}{34} + \frac{y^2}{25} = 1$ معادلة الناقص

معادلة القطع الناقص بالتعريف

1- علاقتنه QF1+QF2=2a

Q نقطة احنا نفرضها تنتمي للقطع (X,Y)

F1,F2 البؤرتين الي بالسؤال

2a العدد الثابت او المحور الكبير

QF1 النقطة والبؤرة الاولى + QF2 النقطة والبؤرة الثانية نطبق بينهم قانون المسافة =2a هو العدد الثابت

خطـــــــوات مبسطه

1- انزل قانون المسافة مع تعويض

2- ننقل الحد الثاني يم العدد الثابت

3- نربع الطرفين الطرف الي باليسره بس يروح الجذر اما الطرف الايمن يصير مربع حدانيه

4- راح يصير عندك اختصار تختصر

5- اذا جان اكو رقم تقلل بي قيم المعادلة قسم واذا ماكوا فتهمل هل نقطة

6- نرجع نربع الطرفين لان راح يبقه عندك جذر

7- ترتب المعادلة تجمع او تطرح او تختصر

مثال كتاب :- باستخدام التعريف جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه F2(-2,0)F1(2,0) والعدد الثابت =6

/Sol

2a=6 , F1(2,0) ,F2(-2,0)

نفرض Q(x,y)

$$QF1 + QF2 = 2a$$

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x+2)^2 + (y-0)^2} = 6$$

$$\sqrt{x^2 - 4x + 4 + y^2} + \sqrt{x^2 + 4x + 4 + y^2} = 6$$

$$\sqrt{(x^2 - 4x + 4 + y^2)} = 6 - \sqrt{x^2 + 4x + 4 + y^2}$$ تربيع الطرفين

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 = 36 - 12\sqrt{x^2 + 4x + 4 + y^2} + x^2 + 4x + 4 + y^2$$

$$12\sqrt{x^2 + 4x + 4 + y^2} = 36 + 8x] \div 4$$

$$3\sqrt{x^2 + 4x + 4 + y^2} = 9 + 2x$$ نربع

$$9(x^2 + 4x + 4 + y^2) = 81 + 36x + 4x^2$$

$$9x^2 + 36x + 36 + 9y^2 = 81 + 36x + 4x^2$$

$$9x^2 - 4x^2 + 9y^2 = 81 - 36$$

$$5x^2 + 9y^2 = 45 [\div 45]$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$$ معادلة القطع الناقص



ملاحظه1:-اذا مر القطع الناقص بنقاط تقع على احد المحاور يعني لو x بيها صفر لو y بيها صفر نستنتج

1-النقطه الي بيها الاحداثي الكبير تمثل قيمة a

2- النقطه الي بيها الاحداثي الصغير تمثل قيمة b

3-تهمل الاشاره

ملاحظه2 :-من ينطي النسبه بين المحورين اكو احتمالين حسب النسبه

البسط > المقام $\frac{2b}{2a}$	او	البسط < المقام $\frac{2a}{2b}$

ملاحظه 3:- بالقطع الناقص الجزء المقطوع يمثل طول احد المحورين لو الكبير او الصغير

ملاحظه 4:-

a-نصف المحور الكبير =a

b-نصف المحور الصغير=b

c-نصف المسافه بين البورتين =c

مثال1:-جد معادله القطع الناقص الذي مركزه نقطه الاصل والمسافه بين بؤرتيه تساوي (8) وحده طول ونصف طول محوره الصغير يساوي (3 وحده طول)

$sol:-\quad 2c=8\rightarrow c=4\rightarrow c^2=16$

$b=3$ نصف طول محوره الصغير

$b^2=9$

$c^2=a^2-b^2\rightarrow 16=a^2-9\rightarrow a^2=25$

لم يحدد موقع البوره لذالك ناخذ احتمالان

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1 \quad or \quad \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$$

مثال 2:-جد معادله القطع الناقص الذي يمر برؤوس المثلث (-4,0)(0,-3)(4,0)

$sol:-$ البؤره على محور السينات

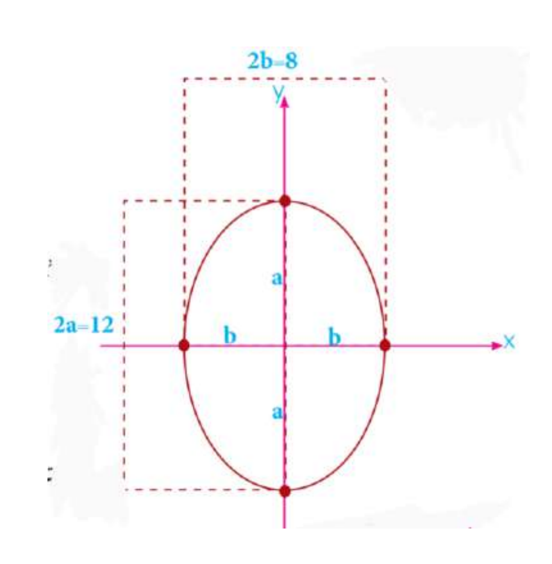
$a=4\ \rightarrow a^2=16$

$b=3\rightarrow b^2=9$

المعادله هي $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$

مثال 3:-جد معادلة القطع الناقص الذى المحورين الاحداثين مركزه نقطه الاصل وينطبق محوره علة يقطع من محور السينات جزءا طوله 8 وحدة ومن محور الصادات جزءا طوله 12 وحدة ثم جد المسافة بين البؤرتين ومساحته منطقته ومحيطه

.



Sol: $2a=12 \rightarrow a=6 \rightarrow a^2=36$

$2b=8 \rightarrow b=4 \rightarrow b^2=16$

المعادلة $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \rightarrow \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{36}=1$

$c^2=a^2-b^2 \rightarrow c^2=36-16$

$c^2=20 \rightarrow c=2\sqrt{5}$

المسافة بين البؤرتين $2c=4\sqrt{5}$ وحدة

مساحته $A=ab\pi \rightarrow A=(6)(4)\pi$

$\rightarrow A=24\pi(unit)^2$

محيطه $p=2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

$p=2\pi\sqrt{\frac{36+16}{2}} = 2\pi\sqrt{\frac{52}{2}}$

$=2\pi\sqrt{26}\, unit$



مثال4:- جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه تنتميان لمحور السينات ومركزه نقطة الاصل ومساحة منطقته 7π وحدة مربعة ومحيطه يساوي 10πوحدة.

Sol

$$A = ab\pi \quad \to 7\pi = ab\pi \quad \to a = \frac{7}{b} \ldots\ldots(1)$$

$$p = 2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \quad \to 10\pi = 2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

$5 = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ بتربيع الطرفين

$$25 = \frac{a^2+b^2}{2} \quad \to 50 = a^2 + b^2 \ldots\ldots(2)$$

(2) في (1) عوض $\to 50 = \frac{49}{b^2} + b^2] * b^2 \quad \to 50b^2 = 49 + b^4$

$$(b^2-49)(b^2-1) = 0 \quad \to either \;\; b^2 - 49 = 0 \quad \to b^2 = 49$$

$b = 7 \quad \to (1)$ عوض في $\to a = \frac{7}{7} = 1 \quad a > b$ يهمل لأن

$or \;\; b^2 - 1 = 0 \quad \to b^2 = 1 \quad \to b = 1 \quad \to (1)$ عوض في $\to a = \frac{7}{1} = 7$

$\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{1} = 1$ معادلة القطع الناقص $\therefore$

مثال 5:- اذا كانت $(e + id = \frac{4+2i}{1-i})$ جد معادلة القطع الناقص لذي احدى بؤرتيه (0,d) وطول محوره الكبير يساوي $\| e + id \| \; 2$.

Sol:

$$e + id = \frac{4+2i}{1-i} * \frac{1+i}{1+i} \to e + id = \frac{4+4i+2i-2}{2}$$

$$e + id = \frac{2+6i}{2} \rightarrow e + id = 1 + 3i \rightarrow e = 1 \ , \quad d = 3$$

$(0,3)$ بؤرة الناقص $\therefore \rightarrow c = 3 \rightarrow c^2 = 9$

$$\| e + id \| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

طول المحور الكبير $= 2a = 2 \| e + id \| = 2\sqrt{10} \rightarrow a = \sqrt{10}$

$$a^2 = 10$$

$$c^2 = a^2 - b^2 \rightarrow 9 = 10 - b^2 \rightarrow b^2 = 1$$

$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{10} = 1$ معادلة الناقص هي $\therefore$

مثال6:- لتكن $kx^2 + 4y^2 = 36$ معادلة قطع ناقص مركزه نقطة الاصل واحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته $y^2 = 4\sqrt{3}x$ جد قيمة $k \in R$

Sol:

$y^2 = 4\sqrt{3}x$ بالمقارنة مع المعادلة $y^2 = 4px \rightarrow 4p = 4\sqrt{3} \rightarrow p = \sqrt{3}$

$F(\sqrt{3}, 0)$ بؤرة المكافئ

$(\pm\sqrt{3}, 0)$ بؤرتي الناقص $\therefore \rightarrow c = \sqrt{3} \rightarrow c^2 = 3$

$kx^2 + 4y^2 = 36 \ ] \div 36 \rightarrow \frac{x^2}{\frac{36}{k}} + \frac{y^2}{9} = 1$ بالمقارنة مع المعادلة

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$a^2 = \frac{36}{k} \ , \ b^2 = 9 \rightarrow c^2 = a^2 - b^2 \rightarrow 3 = \frac{36}{k} - 9 \ ] * k$$

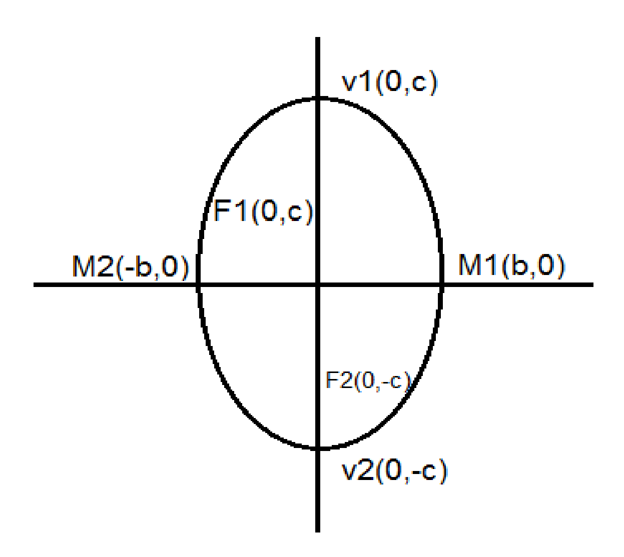
$$3k = 36 - 9k \rightarrow 12k = 36 \rightarrow k = 3$$

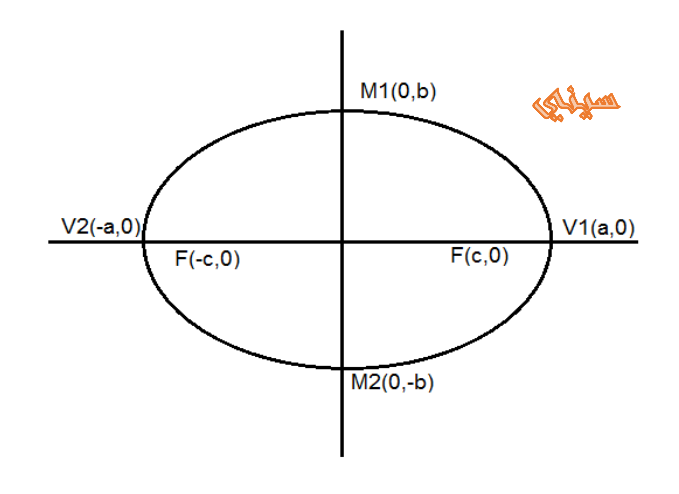


رســـــــــم القطع الناقـــــــــص

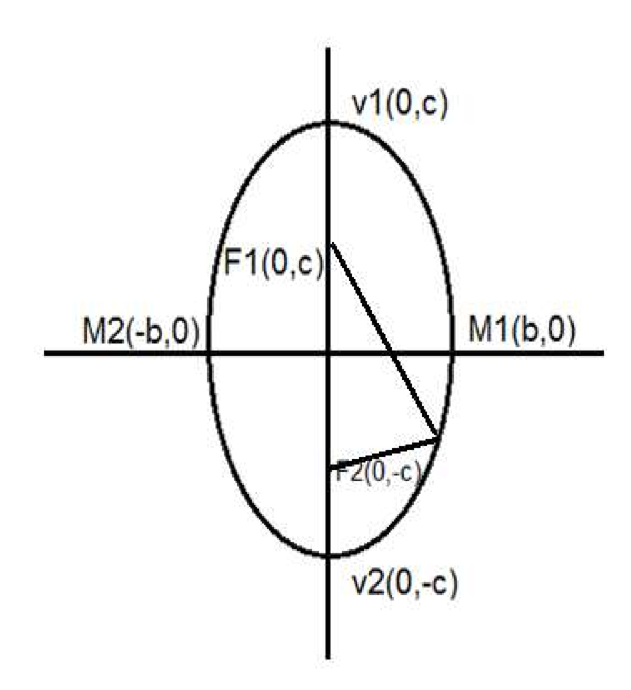
1-نطلع البؤرتين والرأسين والقطبين

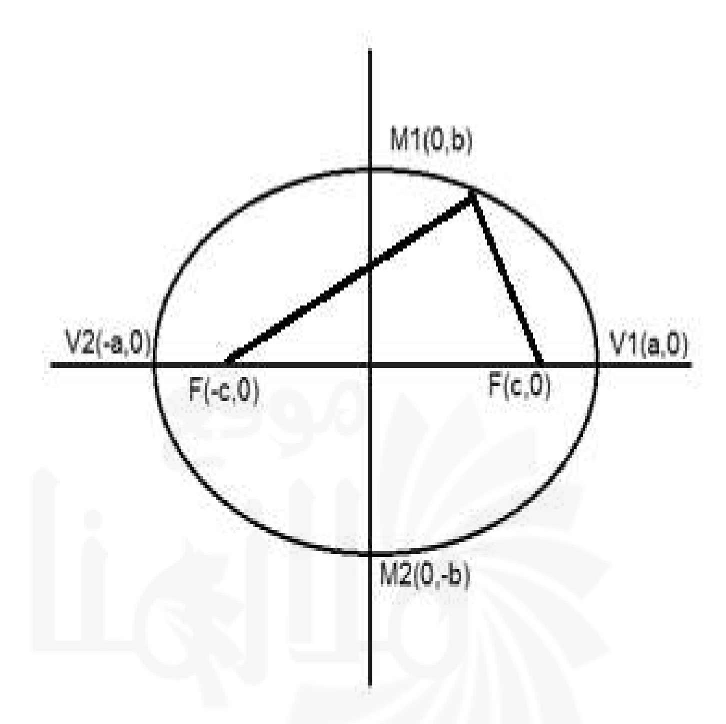
2-نثبتهم على الرسم ادناه





3- نصل بين الرأسين والقطبين بمنحني متصل ليصبح الرسم





ملاحظة مهمة جداً :- كل كلمه (يمر –ينتمي –يقطع) ويذكر نقطة معناه تحقق معادلة

راجع تمرين 4 و 3 من تمارين (2-2)

ملاحظة مهمة جداً :- اذا مر القطع الناقص بنقطة تقع على احد المحورين واحد احداثيها صفر فهاي النقطة لو تمثل الرأس لو القطب شلون نعرف نطلع البؤرة اذا نفس المحور هي والبؤرة معناها الرأس واذا تختلف معناها القطب

مثال \\ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل واحدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ $y^2 + 8x = 0$ ويمر بالنقطة (0 ، 3).

الحل :- في القطع المكافئ $y^2 + 8x = 0 \Rightarrow y^2 = -8x \quad , y^2 = -4Px \Rightarrow 4P = 8 \Rightarrow P = 2$

بؤرة القطع المكافئ هي (0 ، 2-) أي ان بؤرتي القطع الناقص هي (0 ، 2) ، (0 ، 2-) أي ان $c = 2$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 9 = b^2 + 4 \Rightarrow b^2 = 5$$

معادلة القطع الناقص $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$

ملاحظه :- اذا مس القطع الناقص الي مركزه نقطة الاصل دليل قطع مكافئ فان نقطة التماس تقع على احد المحورين (معادلة الدليل x=n) فان نقطة التماس (n,0) (معادله الدليل y=m) نقطة التماس (0,m) راجع مثال السادس بالتمارين

تماريـــــــــــن (2-2)

س1/ عين كل من البؤرتين والرأسين والقطبين والمركز ثم جد طول كل من المحورين والاختلاف المركزي للقطوع الناقصة المبينة معادلاتها في كل مما يأتي

a) $x^2 + 2y^2 = 1$

sol

$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{\frac{1}{2}} = 1$ بالمقارنة مع المعادلة القياسية

$$a^2 = 1 \rightarrow a = 1 \,,,, b^2 = \frac{1}{2} \rightarrow b = \frac{1}{\sqrt{2}}$$



$a^2 = b^2 + c^2 \to 1 = \frac{1}{2} + c^2 \to c^2 = \frac{1}{2} \to c = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$V1(1,0), V2(-1,0)$ الرأسان

$\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ القطبان

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ البؤرتان

$2a = 2(1) = 2$ وحده طول المحور الكبير

$2b = \sqrt{2}$ وحده طول المحور الصغير

$y = 0 \leftarrow$ معادلةه المحور الكبير

$x = 0 \leftarrow$ معادلده المحور الصغير

$e = \frac{c}{a} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{1}$ الاختلاف المركزي

$b)\ 9x^2 + 13y^2 = 117$

sol

$[9x^2 + 13y^2 = 117] \div 117 \to \frac{x^2}{13} + \frac{y^2}{9} = 1$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ بالمقارنه

$a^2 = 13 \to a = \sqrt{13}$

$b^2 = 9 \to b = 3$

$c^2 = a^2 - b^2 \to c^2 = 13 - 9 \to c^2 = 4 \to c = 2$

$V1(\sqrt{13}, 0), V2(-\sqrt{13}, 0)$ الرأسان

$M1(0,3), M2(0,-3)$ القطبان

$F1(2,0), F2(-2,0)$ البؤرتان

$2a = 2\sqrt{13}$ وحدة محور الكبير

$2b = 2(3) = 6$ وحدة محور الصغير

$y = 0$ معادلة المحور الكبير

$x = 0$ معادلة المحور الصغير

الأختلاف المركزي $e = \frac{c}{a} = \frac{2}{\sqrt{13}}$

س2/ جد المعادلة القياسية للقطع الناقص الذي مركزه في نقطة الاصل في كل مما يأتي .

أ-البؤرتان النقطتان (5,0),(-5,0) وطول محوره الكبير يساوي 12 وحدة

المعادلة القياسية $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ شلون عرفت؟ لان البؤرة على السينات

$c = 5 \to c^2 = 25$

$2a = 12 \to a = 6 \to a^2 = 36$

$b^2 = a^2 - c^2 \to b^2 = 36 - 25 \to b^2 = 11$

المعادلة هي $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{11} = 1$

ب-البؤرتان $(0, \mp 2)$ ويتقاطع مع محور السينات عند $x = \mp 4$

$c = 2 \to c^2 = 4$

:. نوع المعادلة هي $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$

$(4,0), (-4,0)$ النقطتان هما قطبان

$b = 4 \to b^2 = 16$

$a^2 = b^2 + c^2 \to a^2 = 16 + 4 \to a^2 = 20$

المعادلة هي $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{20} = 1$

ملاحظه:- اذا كانت بؤرة الناقص تبعد عن الرأسان بعددين بينهما فارزة فان .

1- مجموع العددين =2a

2- الفرق بين العددين =2c

3- غير منهجية للتأكد من الحل (حاصل ضرب الرقمين يمثل b^2)



ج/ أحدى بؤرتيه تبعد عن نهايتي محوره الكبير بالعددين 5, 1 وحده على الترتيب

/Sol احدى البؤرتين تبعد عن الرأسين بالعددين 5, 1

مجموع العددين =2a

$$2a = 5 + 1 \to 2a = 6 \to a = 3 \to a^2 = 9$$

$2c =$ فرق العددين

$$2c = 5 - 1 \to 2c = 4 \to c = 2 \to c^2 = 4$$

$$b^2 = a^2 - c^2 \to b^2 = 9 - 4 \to b^2 = 5$$

مادام بالسؤال ما محدد الموقع مال المعادلة او دليل يدلني عل المعادلة فراح يكون عدنه احتمالين

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \to \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \to \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$$

د:- الأختلاف المركزي $\frac{1}{2}$ وطول محوره الصغير 12 وحدة

$$e = \frac{c}{a} \to \frac{1}{2} = \frac{c}{a} \to a = 2c \to a^2 = 4c^2$$

$$2b = 12 \to b = 6 \to b^2 = 36$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \to (2c)^2 = 36 + c^2 \to 4c^2 = 36 + c^2$$

$$[3c^2 = 36] \div 3 \to c^2 = 12$$

$$a^2 = 4c^2 \to a^2 = 4(12) \to a^2 = 48$$

أحتمالين للمعادلة اما سينات

$$\frac{x^2}{48} + \frac{y^2}{36} = 1$$

او الصادات

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{48} = 1$$

هـ-المسافة بين بؤرتيه تساوي 8 وحدات ونصف محوره الصغير يساوي 3 وحدة

$2c=8 \to c=4 \to c^2=16$

$\frac{1}{2}(2b)=3 \to b=3 \to b^2=9$

$a^2=b^2+c^2 \to a^2=16+9 \to a^2=25$

احتماليين للمعادلة لأن ممحدد

اما على محور السينات $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

او على محور الصادات $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$

س3/ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وأحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته $y^2+8x=0$ علما ان القطع يمر بالنقطة $(2\sqrt{3},\sqrt{3})$

Sol/

.: معادلة القطع المكافئ هي $y^2+8x=0$

$\therefore y^2+8x=0 \to y^2=-8x$

$y^2=-4px$ بالمقارنة مع المعادلة القياسيه

$-4p=8 \to p=2 \to F(-2,0)$ بؤرة قطع مكافئ

$F(-2,0) \to C=-2 \to C^2=4$ نفسها بؤرة القطع الناقص

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ معادلة للقطع الناقص

$a^2=b^2+4$

.: النقطة $(2\sqrt{3},\sqrt{3})$ تحقق المعادلة

$$\frac{(2\sqrt{3})^2}{b^2+4}+\frac{(\sqrt{3})^2}{b^2}=1 \to \frac{12}{b^2+4}+\frac{3}{b^2}=1$$

$$\frac{12b^2+3b^2+12}{b^2(b^2+4)}=1 \to \frac{15b^2+12}{b^4+4b^2}=1$$

$$b^4+4b^2=15b^2+12 \to b^4+4b^2-15b^2-12=0$$



$b^4 - 11b^2 - 12 = 0 \rightarrow (b^2 - 12)(b^2 + 1) = 0$
$b^2 - 12 = 0 \rightarrow b^2 = 12$
$a^2 = 16$
$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ المعادلة هي

س4/باستخدام التعريف جد معادلة القطع الناقص اذا علمت ان

أ-البؤرتان النقطتان $(0, \mp 2)$ ورأساه النقطتان $(0, \mp 3)$ ومركزه نقطة الاصل

$a = 3$

$2a = 6$
$PF1 + PF2 = 2a$
$\sqrt{(x2 - x1)^2 + (y2 - y1)^2} + \sqrt{(X2 - X1)^2 + (y2 - y1)^2} = 6$
$\sqrt{(x - 0)^2 + (y - 2)^2} + \sqrt{(x - 0)^2 + (y + 2)^2} = 6$
$\sqrt{x^2 + y^2 - 4y + 4} + \sqrt{x^2 + y^2 + 4y + 4} = 6$
$\sqrt{x^2 + y^2 - 4y + 4} = 6 - \sqrt{x^2 + y^2 + 4y + 4}$ تربيع الطرفين
$x^2 + y^2 - 4y + 4 = 36 - 12\sqrt{x^2 + y^2 + 4y + 4} + x^2 + y^2 + 4y + 4$
$12\sqrt{x^2 + y^2 + 4y + 4} = 36 + 8y\ [\div 4]$
$3\sqrt{x^2 + y^2 + 4y + 4} = 9 + 2y$ بالتربيع
$9(x^2 + y^2 + 4y + 4) = 81 + 36y + 4y^2$
$9x^2 + 9y^2 + 36y + 36 = 81 + 36y + 4y^2$
$9x^2 + 9y^2 - 4y^2 = 81 - 36 \rightarrow 9x^2 + 5y^2 = 45] \div 45$
$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9}$ معادلة القطع الناقص

ب- المسافة بين البؤرتين 6 وحدة والعدد الثابت 10 والبؤرتان تقعان على محور السينات ومركزه نقطة الاصل

Sol/

$2c=6\rightarrow c=3\rightarrow F1(3,0),F2(-3,0)$

$2a=10 \qquad P(x,y)$

$PF1+PF2=2a$

$\sqrt{(x-3)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x+3)^2+(y-0)^2}=10$

$\sqrt{x^2-6x+9+y^2}+\sqrt{x^2+6x+9+y^2}=10$

$\sqrt{x^2-6x+9+y^2}=10-\sqrt{x^2+6x+9+y^2}$ تربيع الطرفين

$x^2-6x+9+y^2=100-20\sqrt{x^2+6x+9+y^2}+x^2+6x+9+y^2$

$-6x=100-20\sqrt{x^2+6x+9+y^2}+6x$

$20\sqrt{x^2+6x+9+y^2}=100+6x+6x$

$20\sqrt{x^2+6x+9+y^2}=100+12x]\div 4$

$5\sqrt{x^2+6x+9+y^2}=25+3x$ بالتربيع

$25(x^2+6x+9+y^2)=625+150x+9x^2$

$25x^2+150x+225+25y^2=625+150x+9x^2$

$16x^2+25y^2=400]\div 400$

$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ معادلة القطع

س5/ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه على محور السينات ويمر بالنقطتين (3,4)(6,2)

Sol/ البؤرتان على محور السينات

.: المعادلة القياسية من النوع $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$\therefore (6,2)\ni$ للقطع للناقص

.: تحقق معادلته ← .: نعوض النقطة في معادلة القطع

$\frac{36}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1\ \ldots\ldots 1 \leftarrow (6,2)$ نعوض النقطة



$\frac{9}{a^2}+\frac{16}{b^2}=1 \ldots\ldots..2 \leftarrow (3,4)$ نعوض النقطة

$\frac{36}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1$

$\frac{9}{a^2}+\frac{16}{b^2}=1] * 4$ نحل المعادلتين انيا

$-----------------$

$\frac{36}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1$

$\mp\frac{36}{a^2}\mp\frac{64}{b^2}=-4$

$---------$

$\frac{(-60)}{b^2}-3 \rightarrow -3b^2=-60 \rightarrow b^2=\frac{-60}{-3} \rightarrow b^2=20$

$\frac{9}{a^2}+\frac{16}{20}=1 \rightarrow \frac{9}{a^2}=1-\frac{16}{20}$ نعوض في المعادله2

$\frac{9}{a^2}=\frac{4}{20} \rightarrow a^2=45] \frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{20}=1$ المعادله هي .:

س6/ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه نقطتا المنحني $x^2+y^2-3x=16$ مع محور الصادات ويمس دليل القطع المكافئ

$y^2=12x$

/Sol

مادام كال نقطة تقاطع المنحني مع الصادات ومنطيك المعادله معناه تعوض x=0 بمعادلة المنحني

$x^2+y^2-3x=16 \rightarrow (0)^2+y^2-3(0)=16$

$y^2=16 \rightarrow y=\mp 4$

.: نقطتا التقاطع هما $(0,4),(0,-4)$ و هما بؤرتاه الناقص

$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ المعادلة القياسية هي

$y^2=12x$ معادلة القطع المكافئ .:

$y^2=4px$ بالمقترنة

$4p=12 \rightarrow p=3 \rightarrow :. x=-3$ معادلة الدليل

.: نقطه التماس $(-3,0)$

$(-3,0)$ هي قطب الناقص لان تختلف عن البؤرة

$b = 3 \rightarrow b^2 = 9$

$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow a^2 = 9 + 16 \rightarrow a^2 = 25$

.: معادلة القطع الناقص هي $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$

س7/ جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه تنتميان الى محور السينات ومركزه في نقطة الاصل وطول محوره الكبير ضعف طول محوره الصغير ويقطع القطع المكافئ $y^2 + 8x = 0$ عند النقطة التي احداثيها السيني يساوي (-2)

/Sol البؤرتان تنتمي لمحور السينات فان المعادلة القياسية هي

$y^2 + 8x = 0$ عند $x = -2$

$y^2 + 8(-2) = 0 \rightarrow y^2 - 16 = 0 \rightarrow y^2 = 16 \rightarrow y = \mp 4$

.: نقاط التقاطع (-2,+4),(-2,-4) نعوض وحدة منهم

$2a = 2(2b) \rightarrow 2a = 4b \rightarrow a = 2b \rightarrow a^2 = 4b^2$

$\frac{(-2)^2}{(2b)^2} + \frac{(4)^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{4}{4b^2} + \frac{16}{b^2} = 1$

$\frac{1}{b^2} + \frac{16}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{17}{b^2} = 1 \rightarrow b^2 = 17$

$a^2 = 4b^2 \rightarrow a^2 = 4(17) \rightarrow a^2 = 68$

معادلة القطع الناقص هي $\frac{x^2}{68} + \frac{y^2}{17} = 1$



س8-قطع ناقص معادلته $hx^2 + ky^2 = 36$ ومركزه نقطة الاصل ومجموع طولي محوريه يساوي 60 وأحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته $y^2 = 4\sqrt{3}x$ فما قيمة كل من $h, k \in R$

$$[hx^2 + ky^2 = 36] \div 36 \to \frac{hx^2}{36} + \frac{ky^2}{36} = 1$$

$$\frac{x^2}{\frac{36}{h}} + \frac{y^2}{\frac{36}{k}} = 1$$

$$(2a)^2 + (2b)^2 = 60 \to 4a^2 + 4b^2 = 60\ ] \div 4$$

$$a^2 + b^2 = 15 \to a^2 = 15 - b^2 \ldots\ldots\ldots 2$$

نقارن معادلة القطع المكافئ $y^2 = 4\sqrt{3}x$ بالمعادلة القياسية $y^2 = 4px$

$$4p = 4\sqrt{3} \to p = \sqrt{3} \to \therefore F(\sqrt{3}, 0)$$

$F(\sqrt{3}, 0)$ وهي نفسها بؤرة القاطع الناقص

$\therefore$ المعادلة القياسية للقطع الناقص هي $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$c = \sqrt{3} \to c^2 = 3$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \to 15 - b^2 = b^2 + 3 \to 15 - 3 = b^2 + b^2$$

$$12 = 2b^2 \to b^2 = 6$$

$$a^2 = 15 - 6 \to a^2 = 9$$

$$a^2 = \frac{36}{h} \to 9 = \frac{36}{h} \to h = \frac{36}{9} \to h = 4$$

$$b^2 = \frac{36}{k} \to k = \frac{36}{b^2} \to k = \frac{36}{6} \to k = 6$$

س9:- جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وأحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $x^2 = 24y$ ومجموع طولي محوريه 36 وحدة ؟ واجب

س10- جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرته F1(4,0) F2(-4,0) والنقطة Q تنتمي للقطع الناقص بحيث ان محيط المثلث QF1F2 يساوي 24 وحدة .

$c = 4 \rightarrow c^2 = 16 \rightarrow 2c = 8$

.: محيط المثلث مجموع اطوال اضلاعه الثلاثة

$QF1 + QF2 + F1F2 = 24$

$2a + 2c = 24] \div 2 \rightarrow a + c = 12$

$a + 4 = 12 \rightarrow a = 8 \rightarrow a^2 = 64$

$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow b^2 = a^2 - c^2 \rightarrow b^2 = 64 - 16$

$b^2 = 48$

.: معادلة القطع الناقص هي $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$

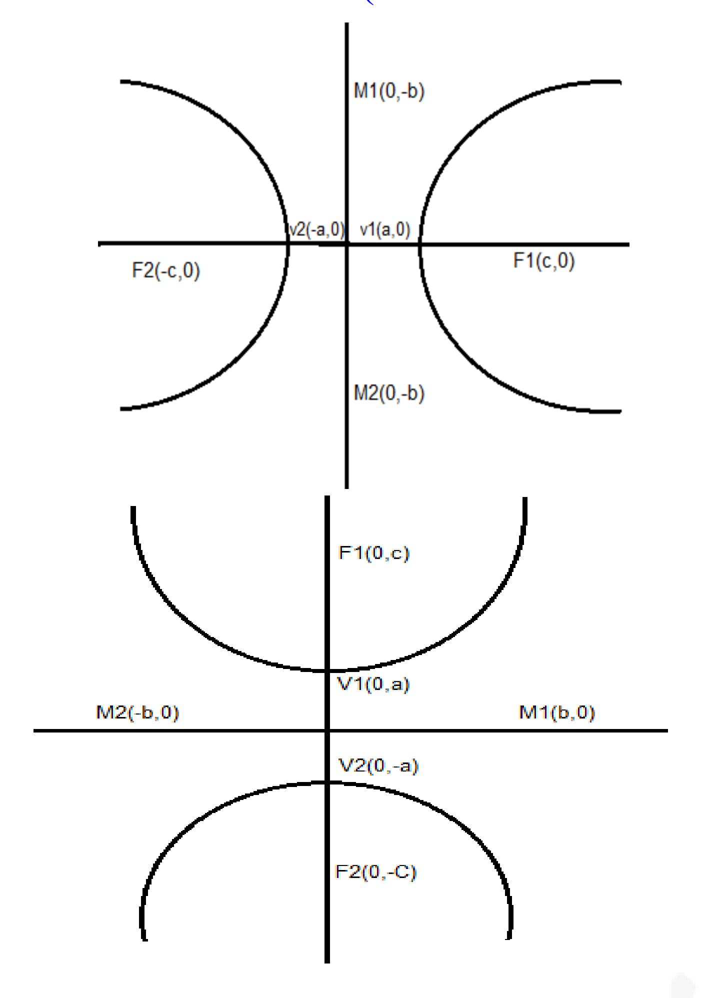




القطع الزائد

هو مجموعة من النقاط في المستوي الي يكون القيمة لفرق بعديها عن نقطتين معلومتين تسمى البؤرتين وتساوي عدد حقيقي ثابت 2a

بعد شبيه بيه معادلتين (معادلة لمحور السينات – معادلة لمحور الصادات)



1- معادلة القطع على محور السينات

1 – المعادلة $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

2 – البؤرتان $F1(c,0)F2(-c,0)$

3 – الراسان $V1(a,0),V2(-a,0)$

4- القطبان M1(0,b),M2(0,-b)

ثانيا :-معادلة القطع على محور الصادات

1- المعادلة $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$

2- البؤرتان F1(0,C) F2(0,-C)

3- الرأسان V1(0,a) V2(0,-a)

4- القطبان M1(b,0) ,M2(-b,0)

*** طول المحور الحقيقي العدد الثابت 2a

*** طول المحور المرافق التخيلي 2b

*** البعد او المسافة بين البؤرتين 2c

علاقة حلال المشاكل هنا $c>a$ $c>b$ $c^2=a^2+b^2$

**الاختلاف المركزي $e=\frac{c}{a}$ والاختلاف المركزي هنا اكبر من الواحد دائما

**بالقطع الزائد المقامات الاول يمثل a^2 والثاني b^2

ملاحظة:- سمي القطع بالزائد لان قيمة الاختلاف المركزي تزيد عن الواحد e>1

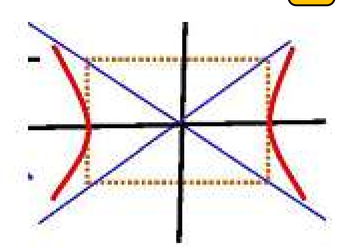
طريقــه رسم القطع الزائد

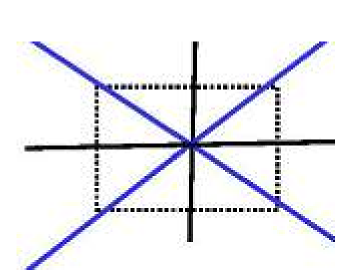
1- نعين الراسين والقطبين ثم نوصل بين الرؤوس بقطعه مستقيمه بحيث يصير الشكل مستطيل

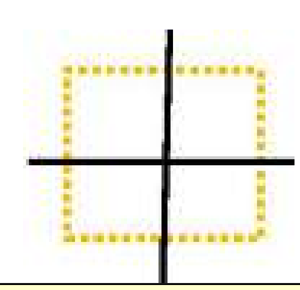
2- نكون مستطيل من النقاط اضلاعه توازي المحورين

3- نرسم قطري المستطيل راح يكونن محاذين القطع الزائد

4- نعين البؤرتين بعدها نرسم ذراعي القطع







مثال كتاب :- عين البؤرتان والرأسان والقطبان وطول كل من المحورين الحقيقي والمرافق والاختلاف المركزي للقطع الزائد $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$

بالمقارنة بالمعادلة القياسية $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

طول المحور الحقيقي وحدة $\therefore a^2=64 \to a=8 \quad 2a=16$

طول المحور المرافق وحدة $, b^2=36 \to b=6 \to 2b=12$

الرأسان $(8,0),(-8,0)$

القطبان $(0,6),(0,-6)$

$c^2=a^2+b^2 \to c^2=64+36 \to c^2=100 \to c=10$

البؤرتان .: $(10,0),(-10,0)$

الاختلاف المركزي $e=\frac{c}{a}=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}$



مثال كتاب :-جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل وطول محوره الحقيقي =6 وحدات والاختلاف المركزي يساوي 2 البؤرتان على محور السينات

$$2a = 6 \to a = 3 \to a^2 = 9$$

$$e = \frac{c}{a} \to 2 = \frac{c}{3} \to c = 6$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \to 36 = 9 + b^2 \to b^2 = 27$$

$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{27} = 1$ المعادلة القياسية هي

مثال :-جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل وطول محوره المرافق 4 وحدات وبؤرتاه هما النقطتان $F1(0, \sqrt{8}), F2(0, -\sqrt{8})$

$$2b = 4 \to b = 2 \to b^2 = 4$$

$$c = \sqrt{8} \to c^2 = 8$$

$$a^2 = c^2 - b^2 \to a^2 = 8 - 4 \to a^2 = 4$$

$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{4} = 1$ المعادلة هي

ملاحظات هامه نستنتجها من السؤال اعلاه

عندما a=b

1- يسمى القطع الزائد بالقائم

2- اختلافه المركزي $e = \sqrt{2}$

مثال :- اثبت ان الاختلاف المركزي للقطع الزائد الذي محوراه متساويان يساوي $\sqrt{2}$

$$a = b \to c^2 = a^2 + b^2 \to c^2 = a^2 + a^2 \to c^2 = 2a^2$$

$$\frac{c^2}{a^2} = 2 \to \frac{c}{a} = \sqrt{2}$$

ايجاد معادله القطع الزائد باستخدام التعريف

العلاقه مالتنه $|PF1-PF2|=2a$ و P هي نقطة (x,y) نفرضها تنتمي للقطع الزائد

F1=البؤرة الاولى F2 =البؤره الثانية

2a=طول المحور الحقيقي

راجع خطوات ايجاد معادلة القطع الناقص ستجدها متشابه (تغير العلاقة فقط)

مثال \\ جد باستخدام التعريف معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه(0 ، 5) ، (0 ، -5) ورأساه (0 ، 3)،(0 ، -3)

sol : let $P(x,y) \in$ HyPerbola ; $||PF_1 - PF_2|| = 2a$

$$\left|\left| \sqrt{(x-5)^2+(y-0)^2} - \sqrt{(x+5)^2+(y-0)^2} \right|\right| = 6$$

$$\sqrt{(x-5)^2+(y-0)^2} - \sqrt{(x+5)^2+(y-0)^2} = \pm 6$$

$$\sqrt{x^2-10x+25+y^2} = \pm 6 + \sqrt{x^2+10x+25+y^2}$$ بتربيع الطرفين

$$x^2-10x+25+y^2 = 36 \pm 12\sqrt{x^2+10x+25+y^2} + x^2+10x+25+y^2$$

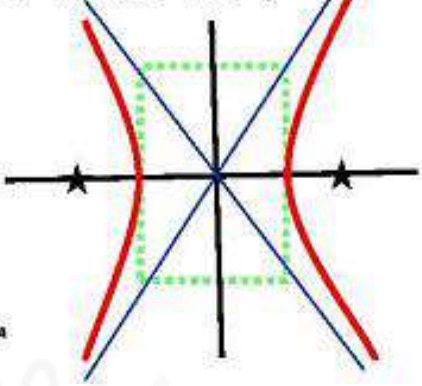
$$[\mp 12\sqrt{x^2+10x+25+y^2} = 36 + 20x\,] \ 4$$ بالقسمة على

$$\mp 3\sqrt{x^2+10x+25+y^2} = 9 + 5x$$ بتربيع الطرفين

$$9(x^2+10x+25+y^2) = 81 + 90x + 25x^2$$

$$9x^2 + 90x + 225 + 9y^2 = 81 + 90x + 25x^2$$

$$[-16x^2 + 9y^2 = -144\,] \div -144 \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$ معادلة القطع الزائد





امثله وملاحظات

1- كل كلمه (يمر – ينتمي يقطع) ويذكر نقطه راح تكون النقطه تحقق معادلة

مثال \\ جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل و بورتاه تنتميان الى محور السينات ويمر بالنقطتين $(4\sqrt{2}\,,3)\,,(-5\,,\frac{9}{4})$.

الحل:- المعادلة القياسية للقطع الزائد هي $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

$[\ \frac{32}{a^2}-\frac{9}{b^2}=1\ ]\ .\ a^2 b^2 \Rightarrow\ 32b^2-9a^2 = a^2 b^2$ .... (1

$[\ \frac{25}{a^2}-\frac{\frac{81}{16}}{b^2}=1\ ]\ .\ a^2 b^2 \Rightarrow \mp 25b^2 \pm \frac{81}{16} a^2 = \mp a^2 b^2$ .... (2 بالطرح

$[\ 7b^2-\frac{63}{16}a^2=0\ ]\ .\ 16\ \Rightarrow 112b^2-63a^2=0$

$\Rightarrow 63a^2 = 112b^2 \Rightarrow a^2=\frac{16}{9}b^2$ .....(3

وذلك من تعويض المعادلة (3) في المعادلة (1) $32b^2-9\,.\frac{16}{9}b^2=(\frac{16}{9}b^2)\,b^2$

$16b^2=\frac{16}{9}b^4 \Rightarrow b^2=9\ \Rightarrow a^2=\frac{16}{9}(9)\Rightarrow a^2=16$

معادلة القطع الزائد $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$

2-اذا ذكر جمله (النسبه بين البعد بين بؤرتيه وطول محوره الحقيقي =رقم) معناه $\frac{2c}{2a}$

اما اذا ذكر النسبه بين البعد بين بؤرتيه وطول محوره المرافق =رقم فمعناه $\frac{2c}{2b}$

اما اذا ذكر النسبه بين طولي محوريه = رقم فمعناه $\frac{2a}{2b}$

مثال جد معادله القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل والبعد بين بؤرتيه الواقعتين على محور الصادات يساوي 6 وحدات و النسبة بين البعد بين بؤرتيه وطول محوره الحقيقي كنسبه $\frac{3}{2}$

الحل :-

$$2c = 6 \to c = 3 \to (0, \mp 3) \text{البؤرتين}$$
$$\frac{2c}{2a} = \frac{3}{2} \to 3a = 2c \to 3a = 6 \to a = 2$$
$$c^2 = a^2 + b^2 \to 9 = 4 + b^2 \to b^2 = 5$$
$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \to \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{5} = 1$$

3- اذا مر القطع الزائد بنقطة احد احداثيها صفر بشرط مركزه القطع الزائد نقطة الاصل فهاي النقطة الي منطيها هي الراس (مهمه جدا)

مثال :- جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل ويمر بالنقطة (3,0) والبعد بين بؤرتيه 10 وحدات

$$2c = 10 \to c = 5$$
$$(3, 0) = (a, 0) \to a = 3$$
$$c^2 = a^2 + b^2 \to 25 = 9 + b^2 \to b^2 = 16$$
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \to \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

4- اذا مس القطع الزائد الي مركزه نقطة الاصل دليل قطع مكافئ فان نقطة التماس تقع على احد المحورين (معادلة الدليل x=n) فان نقطة التماس (n,0)

(معادلة الدليل y=m) نقطة التماس (0,m) فتمثل النقطة راسا له



مثال\\جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل واحدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ $y^2 = -40x$ والذي يمس دليل القطع المكافئ $y^2 + 16x = 0$

الحل :-

$y^2 = -40x$ بالمقارنه $\rightarrow y^2 = -4px \rightarrow 4p = 40 \rightarrow p = 10$

بؤرة المكافئ $(-10,0)$ بؤرتي القطع الزائد هي $(-10,0)(10,0)$

$y^2 + 16x = 0 \rightarrow y^2 = -16x \;, y^2 = -4px$

$4p = 16 \rightarrow p = 4 \;,\; x = p \rightarrow x = 4$

(معادله الدليل4 =x) فان نقطة التماس (4,0)(راجع ملاحظة 3)

للقطع الزائد a =4 c=10

$$c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow 100 = 16 + b^2 \rightarrow b^2 = 84$$

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{84} = 1$$

تذكر ان البؤرة والرأس دائما على نفس المحور والقطب على المحور الثاني

ملاحظه1 :-اذا القطع الزائد ببؤره القطع الناقص فتكون راسا له

ملاحظه 2:- اذا لكينا بالسوال احدى راسيه تبعد عن البورتين بالبعدين

العدد الصغير + العدد الكبير = 2c

العدد الصغير – العدد الكبير = 2a (راجع تمرين 6)

مثال:- جد معادلة القطع الزائد الذي يمر ببؤرتي القطع الناقص $\frac{x^2}{35}+\frac{y^2}{10}=1$ والنسبة بين طول محوره المرافق والبعد بين بؤرتيه $\frac{2}{3}$.

$\frac{x^2}{35}+\frac{y^2}{10}=1$ في القطع الناقص $\rightarrow a^2=35\ ,\quad b=10$

$c^2=a^2-b^2 \rightarrow c^2=35-10=25$

$a^2=25 \rightarrow \frac{2b}{2c}=\frac{2}{3} \rightarrow 2c=3b$

$c=\frac{3}{2}b \rightarrow c^2=\frac{9}{4}b^2 \quad c^2=a^2+b^2 \rightarrow b^2=25+b^2]*4$

$9b^2=100+4b^2 \rightarrow 5b^2=100$

$b^2=20 \rightarrow \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \rightarrow \frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{20}=1$ معادلة القطع الزائد

تمارين (2-3)

س1/ عين كل من البؤرتين والرأسين ثم جد طول كل من المحورين والاختلاف المركزي للقطوع الزائدة :-

$a)\ 12x^2-4y^2=48$

$[12x^2-4y^2=48]\div 48$

$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

$a^2=4 \rightarrow a=2$

$b^2=12 \rightarrow b=2\sqrt{3}$

$c^2=a^2+b^2 \rightarrow c^2=4+12 \rightarrow c^2=16 \rightarrow c=4$

$F1(4,0), F2(-4,0)$ البؤرتين

$V1(2,0)\ , V2(-2,0)$ الراسين



$2a = 2(2) = 4$ طول المحور الحقيقي

$2b = 2(2\sqrt{3}) = 4\sqrt{3}$ طول المحور المرافق

$e = \frac{c}{a} = \frac{4}{2} = 2$

b) $16x^2 - 9y^2 = 144$

$sol\ [16x^2 - 9y^2 = 144] \div 144$

$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

$a^2 = 9 \to a = 3\ ,b^2 = 16 \to b = 4$

$V1(3,0), V2(-3,0)$ الرأسان

$c^2 = a^2 + b^2 = 9 + 16 \to c^2 = 25$

$F1(5,0), F2\ (-5,0)$ البؤرتان

$2a = 2(3) = 6$ طول المحور الحقيقي

$2b = 2(4) = 8$ طول المحور المرافق

$e = \frac{c}{a} = \frac{5}{3}$ الاختلاف المركزي

س2/ اكتب معادله القطع الزائد في الحالات الاتية ثم أرسم القطع

أ- البؤرتان هما النقطتان $(\pm5,0)$ ويتقاطع مع محور السينات $x=\pm3$ ومركزه نقطة الاصل

$c = 5$

$a = 3 \to a^2 = 9$

$c^2 = a^2 + b^2 \to 25 = 9 + b^2 \to b^2 = 16$

$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ المعادلة هي .:

ب- طول محوره الحقيقي 12 وحدة وطول محوره المرافق 10 وحدات وينطبق على المحورين الاحداثين ومركزه نقطة الاصل

$2a = 12 \to a = 6$

$2b = 10 \to b = 5$

مادام ممحدد المحور مكايل لاصادات ولاسينات لذلك راح ناخذ احتماليين

$\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{25}=1$ المعادلة

$\frac{y^2}{36}-\frac{x^2}{25}=1$ المعادلة

ج- مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه على محور الصادات وطول محوره المرافق $2\sqrt{2}$ وحدة وأختلافه المركزي يساوي 3

.: البؤرتان على محور الصادات

.: المعادلة القياسية $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$

$$2b=2\sqrt{2}\rightarrow b=\sqrt{2}$$

$$e=3\rightarrow e=\frac{c}{a}\rightarrow 3=\frac{c}{a}\rightarrow c=3a\rightarrow 8a^2=2\rightarrow a^2=\frac{1}{4}$$

$$c=3\left(\frac{1}{2}\right)\rightarrow c=\frac{3}{2}\rightarrow c^2=\frac{9}{4}$$

$$4y^2-\frac{x^2}{2}=1\leftarrow\frac{y^2}{\frac{1}{4}}-\frac{x^2}{2}=1$$ المعادلة

س3/جد باستخدام التعريف معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل وبؤرتيه $(2\sqrt{2},0),(-2\sqrt{2},0)$ وينطبق محوره على المحورين الاحداثيين والقيمة المطلقة للفرق بين بعدي اي نقطة عن بؤرته يساوي 4 وحدات .

Sol/

$$F1(2\sqrt{2},0),F2(-2\sqrt{2},0)\quad ,2a=4$$

$$|PF1-PF2|2A\rightarrow PF1-PF2=\mp 2a$$

$$\sqrt{\left(x-2\sqrt{2}\right)^2+(y-0)^2}-\sqrt{\left(x+2\sqrt{2}\right)^2+(y-0)^2}=\mp 4$$

$$\sqrt{x^2-4\sqrt{2}x+8+y^2}-\sqrt{x^2+4\sqrt{2}x+8+y^2}=\mp 4$$



$$\sqrt{x^2 - 4\sqrt{2}x + 8 + y^2} = \mp 4 + \sqrt{x^2 + 4\sqrt{2}x + 8 + y^2}$$

$$x^2 - 4\sqrt{2}x + 8 + y^2 = 16 \mp 8\sqrt{x^2 + 4\sqrt{2}x + 8 + y^2} + x^2 + 4\sqrt{2}x + 8 + y^2$$

$$\mp 8\sqrt{x^2 + 4\sqrt{2}x + 8 + y^2} = 16 + 8\sqrt{2}x\,] \div 8$$

$\mp\sqrt{x^2 + 4\sqrt{2}x + 8 + y^2} = 2 + \sqrt{2}x$ بالتربيع

$$x^2 - 2x^2 + y^2 = 4 - 8$$

$$-x^2 + y^2 = -4 \rightarrow \frac{(-x)^2}{-4} + \frac{y^2}{-4} = \frac{-4}{-4}$$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$$

س4/ قطع زائد طول محوره الحقيقي 6 وحدات واحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل ويمر بالنقطتين $((1, 2\sqrt{5}), (1, -2\sqrt{5}))$ جد معادلتي القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل والقطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل

sol

$$2a = 6 \rightarrow a = 3 \rightarrow a^2 = 9$$

مادام النقطتين بيهم الاحداثي السـيني متشـابه يعني المعادلة سـينات ونختار اي نقطة تحقق معادله حسب ملاحظات القطع المكافئ

$$\left(2\sqrt{5}\right)^2 = 4p(1) \rightarrow 20 = 4p \rightarrow p = 5$$

$(5, 0) \rightarrow$ بؤرة قطع مكافئ هي

معادلة مكافئ قطع $y^2 = 20x$

بؤرة القطع الزائد (5,0)

$$c = 5 \rightarrow c^2 = 25$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow 25 = 9 + b^2 \rightarrow b^2 = 16$$

$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ المعادلة للقطع الزائد

س5/ قطع زائد مركزه نقطة الاصـــل ومعادلته $hx^2 - ky^2 = 90$ وطول محوره الحقيقي $(6\sqrt{2})$ وحدة وبؤرتاه تنطبقان على بؤرتي القطع الناقص الذي معادلته $9x^2 + 16y^2 = 576$ جد قيمة كل من k,h التي تنتمي الى مجموعة الاعداد الحقيقية

sol

$$[hx^2 - ky^2 = 90] \div 90$$

$$\therefore \frac{hx^2}{90} - \frac{ky^2}{90} = 1$$

$$\frac{x^2}{\left(\frac{90}{h}\right)} - \frac{y^2}{\frac{90}{k}} = 1$$ بالمقارنة مع القياسية

$$\therefore a^2 = \frac{90}{h} \quad , b^2 = \frac{90}{k}$$

$2a = 6\sqrt{2} \rightarrow a = 3\sqrt{2} \rightarrow a^2 = 18$ ق.ز

$$a^2 = \frac{90}{h} \rightarrow 18 = \frac{90}{h} \rightarrow h = \frac{90}{18} \rightarrow h = 5$$

$$[9x^2 + 16y^2 = 576] \div 576$$

$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1$$

$$a^2 = 64$$

$$b^2 = 36$$

$$c^2 = a^2 - b^2 \rightarrow c^2 = 64 - 36 = 28$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow 28 = 18 + b^2 \rightarrow \therefore b^2 = 10$$

$$b^2 = \frac{90}{k} \rightarrow 10 \rightarrow 10 = \frac{90}{k} \rightarrow k = \frac{90}{10} \rightarrow k = 9$$

ملاحظة:- اذا جان احد الراسين بالقطع الزائد يبعد عن البؤرتين بعددين بينه فارزه راح يكون (الفرق بينهم $= 2a$) (مجموعهم $= 2c$)



س6/ اكتب معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل اذا علمت ان احد رأسيه يبعد عن البؤرتين بالعددين 9 , 1 وحدات على الترتيب وينطبق محوره على المحورين الأحداثيين :-

$2c = 9 + 1 \rightarrow 2c = 10 \rightarrow c = 5 \rightarrow c^2 = 25$

$2a = 9 - 1 \rightarrow 2a = 8 \rightarrow a = 4 \rightarrow a^2 = 16$

$c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow 52 = 16 + b^2$

$b^2 = 9$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

س7/ جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطع الزائد الذي معادلته $x^2 - 3y^2 = 12$ والنسبه بين طولي محوريه $= \frac{5}{3}$ ومركزه نقطة الاصل .

الحل:- نطلع بؤرتي القطع الناقص همَ نفسهم للزائد

يقصد بكلمة طولي محوريه $\frac{2a}{2b}$

sol

$[x^2 - 3y^2 = 12] \div 12$

$\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$

$a^2 = 12 , b^2 = 4$

$c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow c^2 = 12 + 4 = 16$

$c = 4 \rightarrow F1(4, 0), F2(-4, 0)$ بؤرتاه القطع الزائد

$F1(4, 0) , F2(-4, 0)$ بؤرتاه الناقص

$\frac{2a}{2b} = \frac{5}{3} \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{5}{3} \rightarrow 3a = 5b \rightarrow a = \frac{5b}{3}$

$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow \left(\frac{5b}{3}\right)^2 = b^2 + 16$

$\frac{25b^2}{9} = b^2 + 16 \rightarrow 25b^2 = 9b^2 + 144$

$b^2 = 9 \rightarrow b = 3$

$a = \frac{5b}{3} = \frac{5(3)}{3} \rightarrow a = 5$

$a^2 = 25$

المعادلة هي $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

س8/ النقطة $P(6,L)$ تنتمي الى القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل ومعادلته $x^2 - 3y^2 = 12$ جد كلا من

أ- قيمة L

ب- طول النصف القطري البؤري للقطع المرسوم في جهة من النقطة P

الحل :- النقطة $P(6,L)$ تحقق معادلته

$(6)^2 - 3L^2 = 12$

$36 - 3L^2 = 12 \rightarrow 36 - 12 = 3L^2 \rightarrow 3L^2 = 24$

$L^2 = 8 \rightarrow L = \mp 2\sqrt{2}$

$[x^2 - 3y^2 = 12] \div 12 \rightarrow \frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$

$a^2 = 12 , b^2 = 4 \rightarrow c^2 = a^2 + b^2$

$c^2 = 12 + 4 \rightarrow c^2 = 16 \rightarrow c = 4$

بؤرتا القطع الزائد $F1(4,0), F2(-4,0)$

النقطتان هما $P1(6, 2\sqrt{2}), P2(6, -2\sqrt{2})$

$PF1 = \sqrt{(6-4)^2 + (2\sqrt{2} - 0)^2} = \sqrt{(2)^2 + (2\sqrt{2})^2}$

$= \sqrt{4+8} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ وحدة طول

$P2F1 = \sqrt{(6-4)^2 + (-2\sqrt{2} - 0)^2} = \sqrt{4+8} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

س9/ جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطع الناقص $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ يمس دليل القطع المكافئ $x^2 + 12y = 0$

$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

$b^2 = 9 \rightarrow b = 3 , a^2 = 25 \rightarrow a = 5$

$c^2 = a^2 - b^2 \rightarrow c^2 = 25 - 9 \rightarrow c^2 = 16 \rightarrow c = 4$



$F1(0.4), F2(0,-4)$ بؤرتا القطع الناقص
$c = 4 \rightarrow c^2 = 16 \leftarrow$ بؤرتا القطع الزائد
$x^2 = -12y$ معادلة القطع المكافئ
$x^2 = -4py$ بالمقارنة
$-4p = -12 \rightarrow p = 3$
$y = 3$ معادلة الدليل هي
نقطه التماس هي$(0,3)$ هي رأس القطع الزائد
لان أحد أحداثيها صفر فبالتأكيد هي رأس

$a = 3 \rightarrow a^2 = 9 \rightarrow b^2 = c^2 - a^2$
$b^2 = 16 - 9 \rightarrow b^2 = 7$
$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{7} = 1$ المعادلة للقطع الزائد

س تمارين عامه واجب/ قطع ناقص مركزه نقطة الاصل وقطع زائد نقطة تقاطع محوريه نقطة الاصل كل منهما يمر ببؤرة الاخر فاذا كانت

$9x^2 + 25y^2 = 225$

هي معادلة القطع الناقص فجد

1- مساحة القطع الناقص
2- محيط القطع الناقص
3- معادلة القطع الزائد ثم ارسمه
4- الاختلاف المركزي لكل منهما

ملاحظة مهمة جدا

من يذكر كل منهما يمر ببؤرة الاخر معناه
بؤرتي القطع الناقص هما راسي القطع الزائد
ورأسي القطع الناقص هما بؤرتي القطع الزائد

الانسحاب للقطوع المخروطيه ((للفرع التطبيقي))

ملاحظه مهمه:-نميز اسئله الانسحاب عن باقي الاسئله مابيها عباره (مركزه نقطه الاصل او عباره (0,0) c))

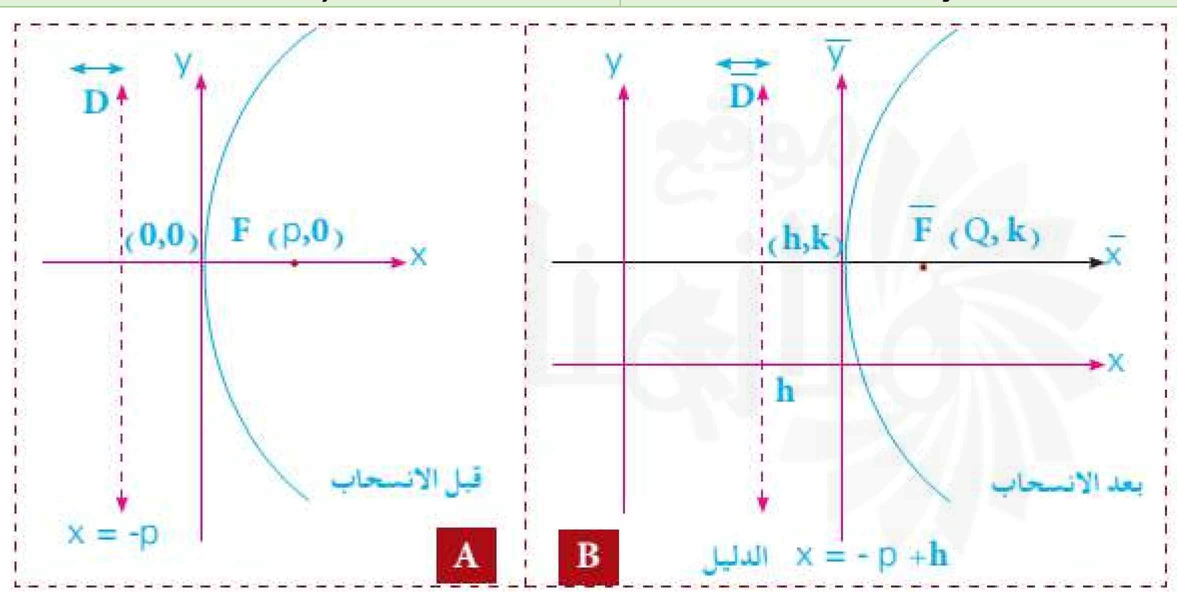
انسحاب المحاور للقطع المكافــــــئ

1-انسحاب القطع المكافئ السيني الموجب

بعد الانسحاب	قبل الانسحاب
المعادلة القياسية $(y-k)^2 = 4p(x-h)$	المعادلة القياسية $y^2 = 4xp$
رأسه (h,k)	رأسه نقطة الاصل (0,0)
البؤرة =$\bar{F}(p+h,k)$	البؤرة F(p,0)
معادلة الدليل $x= -p+h$	معادلة الدليل $x = -p$
معادلة المحور $y = k$	معادلة المحور $y = 0$

2-انسحاب القطع المكافئ السيني السالب

بعد الانسحاب	قبل الانسحاب
المعادلة القياسية $(y-k)^2 = -4p(x-h)$	المعادلة القياسية $y^2 = -4xp$
رأسه (h,k)	رأسه نقطة الاصل (0,0)
البؤرة =$\bar{F}(-p+h,k)$	البؤرة F(- p,0)
معادلة الدليل $x= p+h$	معادلة الدليل $x = p$
معادلة المحور $y = k$	معادلة المحور $y = 0$





3-انسحاب القطع المكافئ الصادي الموجب

بعد الانسحاب	قبل الانسحاب
المعادلة القياسية $(x-h)^2 = 4p(y-k)$	المعادلة القياسية $x^2 = 4yp$
رأسه (h,k)	رأسه نقطة الاصل $(0,0)$
البؤرة $\overline{F}(h, p+k)$=	البؤرة $F(0,p)$
معادلة الدليل $y= - p+h$	معادلة الدليل $y = - p$
معادلة المحور $x=h$	معادلة المحور $x = 0$

4-انسحاب القطع المكافئ الصادي السالب

بعد الانسحاب	قبل الانسحاب
المعادلة القياسية $(x-h)^2 = -4p(x-h)$	المعادلة القياسية $x^2 = -4yp$
رأسه (h,k)	رأسه نقطة الاصل $(0,0)$
البؤرة $\overline{F}(h, -p+k)$=	البؤرة $F(0,-p)$
معادلة الدليل $y= p+k$	معادلة الدليل $y = p$
معادلة المحور $x=h$	معادلة المحور $x = 0$

ملاحظه:-كل احداثي سيني نضيف له h وكل احداثي صادي نضيف له k بس معادلة القطع المكافئ نطرح h,k

مثال:-من معادله القطع المكافئ

$$(y+1)^2 = 4(x-2)$$

$Sol:$

$(y-k)^2 = 4p(x-h)$ نقارن بالمعادله القياسيه

$h = 2\ ,\quad k = -1\ \rightarrow$ الرأس $(h,k) = (2,-1)$

$4p = 4\ \rightarrow p = 1\ \rightarrow$ البؤرة $\overline{F}(p+h,k) = \overline{F}(1+2,-1) = (3,-1)$

معادلة الدليل $x = -p + h\ \rightarrow x = -1 + 2\ \rightarrow x = 1$

معادلة المحور $y = k\ \rightarrow y = -1$

$x = -p + h \rightarrow x = -1 + 2 = 1$ معادله الدليل

ملاحظه مهمه

اذا جان معادله القطع لاتشبه الصوره القياسيه لازم نحولها الى الصوره القياسيه بطريقة اكمال المربع

طريقه الحل

1-نخلي المتغير التربيعي (الي فوكاه تربيع)مع قرينه (الي بدون تربيع)بطرف وباقي الحدود بالطرف الاخر

2-لازم معامل المتغير التربيعي =1

3-نضيف للطرفين مربع نصف معامل القرين علمود يصبح الطرف الذي يحتوي على المتغير التربيعي مكون من ثلاث حدود

4-نطبق قانون مربع الكامل ثم نقارن بالمعادله القياسيه

مثال:- ناقش القطع المكافئ: $y = x^2 + 4x$

نضيف 4 الى طرفي المعادلة حتى نضع حدود x في شكل مربع كامل

$y + 4 = x^2 + 4x + 4$

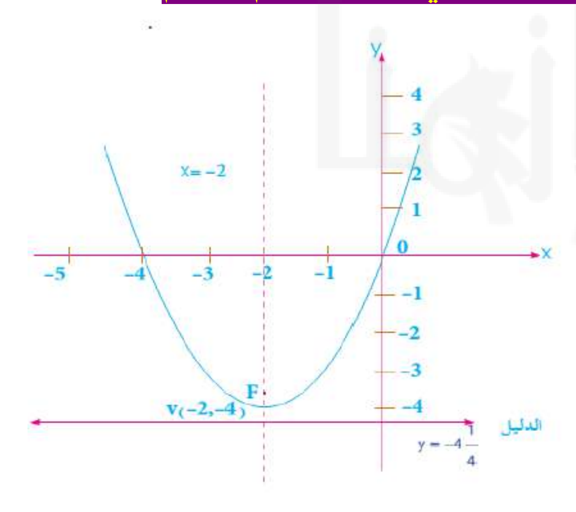
$y + 4 = (x+2)^2$

بالمقارنه $(x-h)^2 = 4p(y-k)$

الرأس $(-2, -4)$ $\Rightarrow$ $h=-2 \ , \ k=-4$

$4p=1 \ , \ p=\frac{1}{4}$

ملاحظه:-من يكلك ناقش القطع المخروطي معناه لازم ترسم





التمارين الخاصه بالموضوع

1) $y^2 = -4(x-2)$

sol : $y^2 = -4(x-2)$, $(y-k)^2 = -4p(x-h) \Rightarrow 4p = 4 \Rightarrow p = 1$

$F(h-p, k) = F(1, 0)$ البؤرة , $V(h, k) = (2, 0)$ الرأس

$x = h+p \Rightarrow x = 3$ معادلة الدليل , $y = k \Rightarrow y = 0$ معادلة المحور

2) $(x-1)^2 = 8(y-1)$

sol : $(x-1)^2 = 8(y-1)$, $(x-h)^2 = 4p(y-k) \Rightarrow 4p = 8 \Rightarrow p = 2$

$F(h, k+p) = F(1, 3)$ البؤرة , $V(h, k) = (1, 1)$ الرأس

$y = k-p \Rightarrow y = -1$ معادلة الدليل , $x = h \Rightarrow x$ معادله المحور

3) $(x-1)^2 = 8(y-1)$

$h = 1, k = 1$

$(h,k) = (1,1)$ الرأس

$4p = 8 \Rightarrow p = \frac{8}{4} \Rightarrow p = 2$

$\overline{F}(h, p+k) = \overline{F}(1, 2+1) = \overline{F}(1,3)$ البؤرة

$y = k - p \Rightarrow y = 1 - 2 \Rightarrow y = -1$ معادلة الدليل

$x = h \Rightarrow x = 1$ معادلة المحور

4) $y^2 + 4y + 2x = -6$

$y^2 + 4y + 2x + 4 = -6 + 4$

$y^2 + 4y + 4 = -2 - 2x$

$(y+2)^2 = -2(x+1)$

$\therefore k = -2, h = -1 \Rightarrow \overline{v}(-1,-2)$ الرأس

$-4p = -2 \Rightarrow p = \frac{2}{4} \Rightarrow p = \frac{1}{2}$

$\overline{F}(-p+h, k) = \overline{F}(-\frac{1}{2} - 1, -2) = \overline{F}(\frac{-3}{2}, -2)$ البؤرة

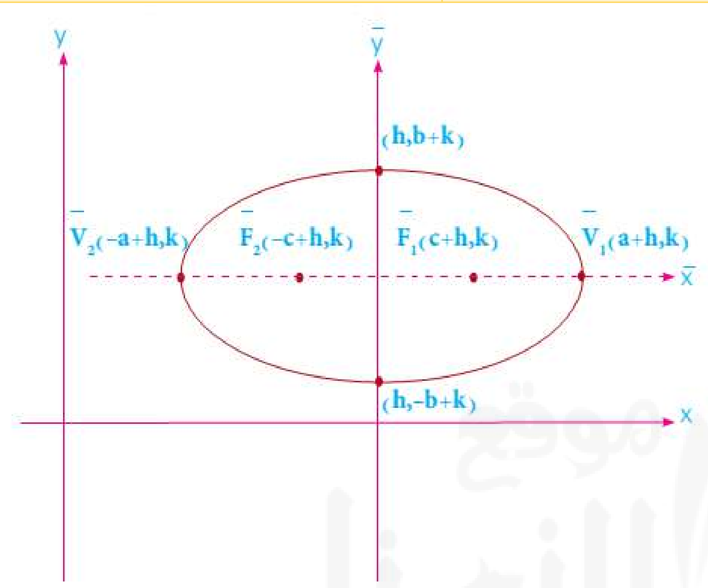
$x = p + h \Rightarrow x = -\frac{1}{2} - 1 \Rightarrow x = \frac{-1}{2}$ معادلة الدليل

$y = k \Rightarrow y = -2$ معادلة المحور

انسحاب المحاور للقطع الناقص

اولا: االقطع الناقص السيني

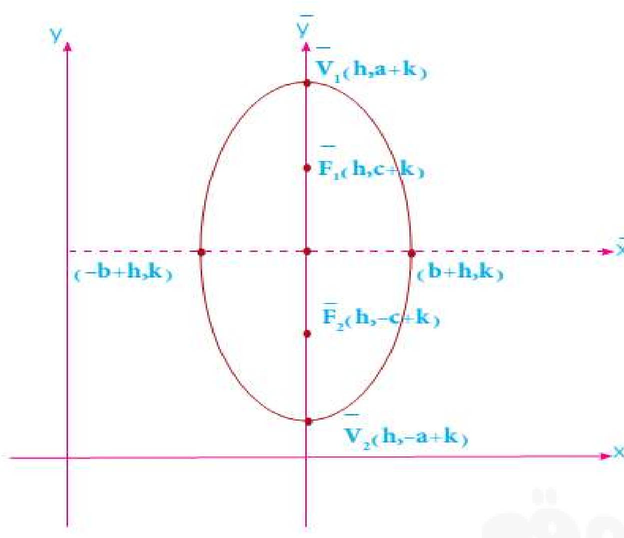
بعد الانسحاب	قبل الانسحاب
المعادلة القياسية $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$	المعادلة القياسية $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
مركزه النقطة $\overline{C}(h,k)$	مركزه نقطة الاصل C(0,0)
الرأسان $\overline{V1}(a+h,k),\overline{V2}(-a+h,k)$	الرأسان $V1(a,0),v2(-a,0)$
القطبان $\overline{M1}(h,b+k),\overline{M2}(h,-b+k)$	القطبان M1(0,b),M2(0,-b)
البؤرتان $\overline{F1}(c+h,k),\overline{F2}(-c+h,k)$	البؤرتان $F1(c,0),F2(-c,0)$
طول المحور الكبير =2a **يوازي محور السينات** **معادلة محوره الكبير y = k**	طول محوره الكبير =2a منطبق على محور السينات معادلة محوره الكبير y = 0
طول محوره الصغير =2b **يوازي محور الصادات** **معادلة محوره الصغير x = h**	طول محوره الصغير =2b منطبق على محور الصادات معادلة محوره الصغير x = 0





ثانيا: القطع الناقص الصادي

بعد الانسحاب	قبل الانسحاب
المعادلة القياسية $\frac{(y-k)^2}{a^2}+\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$	المعادلة القياسية $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$
مركزه النقطة $\overline{C}(h,k)$	مركزه نقطة الاصل C(0,0)
الرأسان $\overline{V1}(h,a+k),\overline{V2}(h,-a+k)$	الرأسان $V1(0,a),v2(0,-a)$
القطبان $\overline{M1}(b+h,k),\overline{M2}(-b+h,k)$	القطبان M1(b,0),M2(-b,0)
البؤرتان $\overline{F1}(h,c+k),\overline{F2}(h,-c+k)$	البؤرتان $F1(0,c),F2(0,-c)$
طول المحور الكبير =2a **معادلة محوره الكبير x = h**	طول محوره الكبير =2a معادلة محوره الكبير x = 0
طول محوره الصغير =2b **يوازي محور السينات** **معادلة محوره الصغير y = k**	طول محوره الصغير =2b منطبق على محور السينات معادلة محوره الصغير y = 0



مثال:-جد البورتين والرائسين والقطبين وطول كل من المحورين والاختلاف المركزي

$$\frac{(x+3)^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{25}=1$$

بالمقارنة مع $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$

المركز $h=-3\,,k=-2\ \rightarrow \bar{C}(h,k)=\bar{C}(-3,-2)$

$a^2=25\ \rightarrow a=5$

الرأسين

$\overline{V1}(h,a+k)=\overline{V1}(-3,5-2)=\overline{V1}(-3,3)$

$\overline{V2}(h,-a+k)=\overline{V2}(-3,-5-2)=\overline{V2}(-3,-7)$

$b^2=9\ \rightarrow b=3$

القطبين

$\overline{M1}(-b+h,k)=\overline{M1}(-3-3,-2)=\overline{M1}(0,-2)$

$\overline{M2}(-b+h,k)=\overline{M2}(-3-3,-2)=\overline{M2}(-6,-2)$

$c^2=a^2-b^2\ \rightarrow c^2=25-9\ \rightarrow c^2=16\ \rightarrow c=4$

البؤرتين

$\overline{F1}(h,c+k)=\overline{F1}(-3,4-2)=\overline{F1}(-3,2)$

$\overline{F2}(h,-c+k)=\overline{F2}(-3,-4-2)=\overline{F2}(-3,-6)$

طول المحور الكبير $=2a=2(5)=10\ unit$

معادلة المحور الكبير $x=h\ \rightarrow x=-3$

طول المحور الصغير $=2b=2(3)=6\ unit$

معادلة المحور الصغير $y=k\ \rightarrow y=-2$

الاختلاف المركزي $e=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}<1$



ملاحظه مهمه:-اذا اجتي المعادله ماتشبه الصوره القياسيه بالقطع الزائد او الناقص فلازم نحولها الى قياسيه باتباع الخطوات

1-نخلي كل متغير تربيعي وقرينه بالطرف الايسر وباقي الحدود بالطرف الايمن

2-نستخرج عامل مشترك من كل متغير تربيعي اذا جان معامله مو 1

3-نضيف مربع نصف معامل القرين للطرف الايسر وكل عدد تضيفه تضربه بالعامل المشترك وتضيفه للطرف الايمن

4-الان نستخدم طريقه (المربع الكامل) ونكمل الحل

التمارين الخاصه بالموضوع

س\جد البورتين والرائسين والقطبين وطول كل من المحورين والاختلاف المركزي

1) $\frac{(x+3)^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{25}=1$

$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$ بالمقارنه

$h=-3 \quad k=-2 \rightarrow (h,k)=(-3,-2)$ الراس

$a^2=25 \rightarrow a=5 \quad ,2a=10$ طول المحور الكبير $\quad x=-3$ معادله المحور الكبير

$b^2=9 \rightarrow b=3 \rightarrow 2b=6$ طول المحور الصغير $y=-2$ طول المحور الصغير

$a^2=b^2+c^2 \rightarrow 25=9+c^2 \rightarrow c^2=16 \rightarrow c=4$

$F1(h,k+c)=(-3,2)\ ,F2(h,k-c)=(-3,-6)$ البورتان

$V1(h,k+a)=(-3,3)\ ,V2(h,k-a)=(-3,-7)$ الراسان

$M1=(h+b,k)=(0,-2),\ \ M2(-6,-2)$ القطبان

$e=\frac{c}{a}\rightarrow e=\frac{4}{5}$ الاختلاف المركزي

2) $9x^2+16y^2-72x-96y+144=0$

$(9x^2-72x)+(16y^2-96y)=-144$ نستخرج عامل مشترك

$9(x^2-8x)+16(y^2-6y)=-144$

$9(x^2-8x+16)+16(y^2-6y+9)=-144+144+144$

مربع كامل $(\text{جذر الثالث} \pm \text{جذر الاول})^2$

نقسم المعادلة على 144 $9(x-4)^2 + 16(y-3)^2 = 144$

$$\frac{(x-4)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$$

بالمقارنة مع $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{y-k}{b^2} = 1$

$h = 4 \;, \quad k = 3 \quad \rightarrow \bar{C}(h,k) = \bar{C}(4,3)$

$a^2 = 16 \quad \rightarrow a = 4$

$\overline{V1}(a+h,k) = \overline{V1}(4+4,3) = \overline{V1}(8,3)$

$\overline{V2}(-a+h,k) = \overline{V2}(-4+4,3) = \overline{V2}(0,3)$

$b^2 = 9 \quad \rightarrow b = 3$

$\overline{M1}(h,b+k) = \overline{M1}(4,3+3) = \overline{M1}(4,6)$

$\overline{M2}(h,-b+k) = \overline{M2}(4,-3+3) = \overline{M2}(4,0)$

$c^2 = a^2 - b^2 \quad \rightarrow c^2 = 16 - 9 \rightarrow c^2 = 7 \rightarrow c = \sqrt{7}$

$\overline{F1}(c+h,k) = \overline{F1}\left(\sqrt{7}+4,3\right)$

$\overline{F2}(-c+h,k) = \overline{F2}\left(-\sqrt{7}+4,3\right)$

طول المحور الكبير $= 2a = 2(4) = 8\,unit$

معادلة المحور الكبير $y = k \quad \rightarrow y = 3$

طول المحور الصغير $= 2b = 2(3) = 6\,unit$

معادلة المحور الصغير $x = h \quad \rightarrow x = 4$

الاختلاف المركزي $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{7}}{4} < 1$



واجبات بنفس الطريقه :- جد البورتين والرائسين والقطبين وطول كل من المحورين والاختلاف المركزي

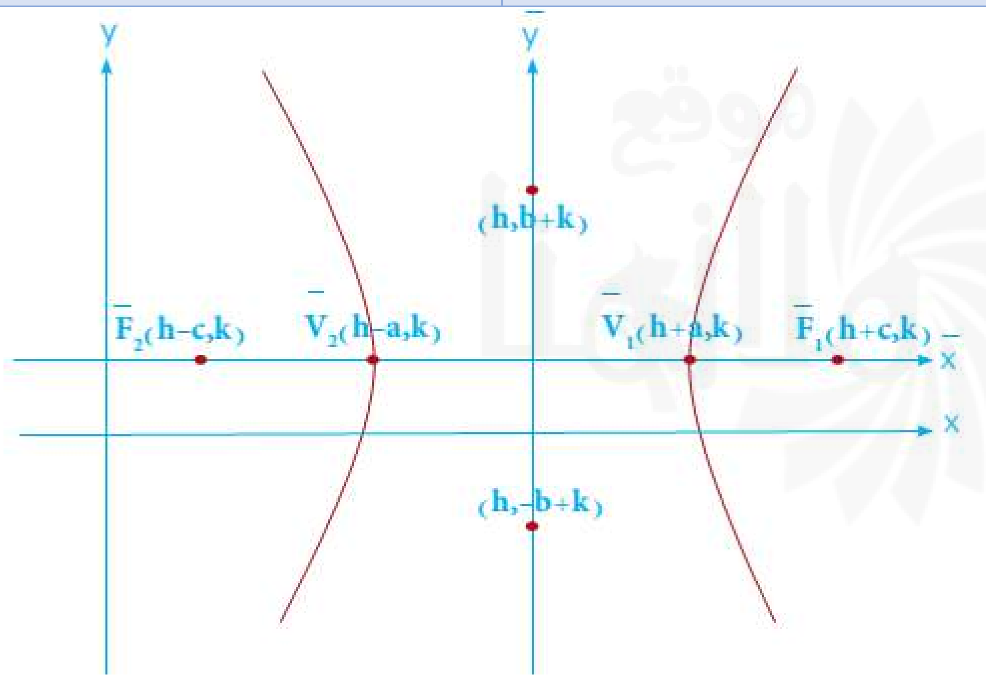
1) $\frac{(x-4)^2}{81}+\frac{(y+1)^2}{25}=1$

2) $x^2+25y^2+4x-15y+204=0$

انسحاب المحاور فى القطع الزائد

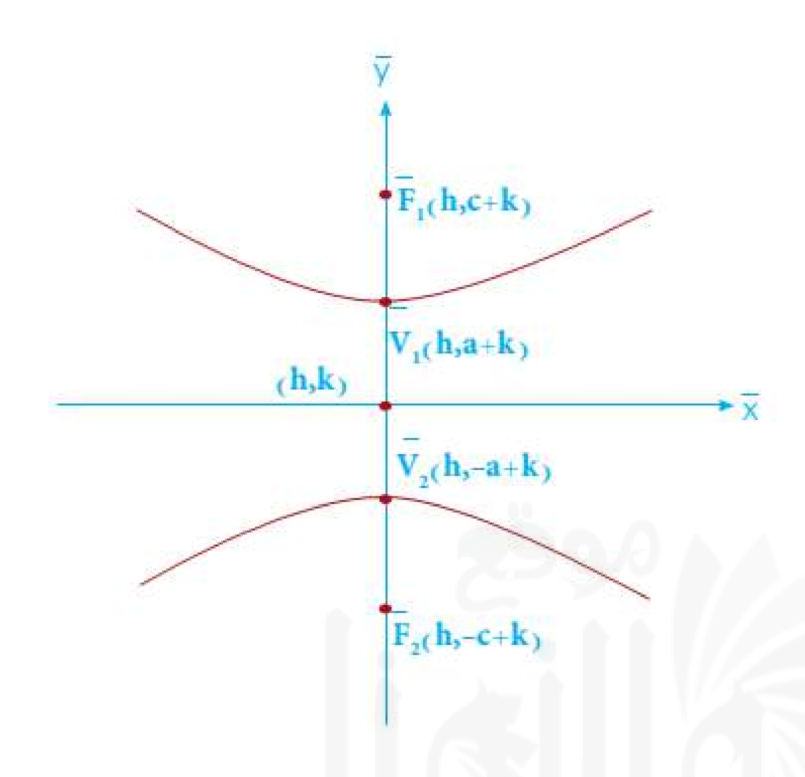
اولا: القطع الزائد السيني

بعد الانسحاب	قبل الانسحاب
المعادلة القياسية $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$	المعادلة القياسية $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
مركزه النقطة $\bar{C}(h,k)$	مركزه نقطة الاصل C(0,0)
الرأسان $\overline{V1}(a+h,k),\overline{V2}(-a+h,k)$	الرأسان $V1(a,0),v2(-a,0)$
القطبان $\overline{M1}(h,b+k),\overline{M2}(h,-b+k)$	القطبان M1(0,b),M2(0,-b)
البؤرتان $\overline{F1}(c+h,k),\overline{F2}(-c+h,k)$	البؤرتان $F1(c,0),F2(-c,0)$
طول المحور الحقيقي =2a **معادلة محوره الحقيقي y = k**	طول محوره الحقيقي =2a معادلة محوره الحقيقي y = 0
طول محوره المرافق(التخيلي) =2b **معادلة محوره المرافق x = h**	طول محوره المرافق (التخيلي) =2b معادلة محوره المرافق x = 0



ثانيا:- القطع الزائد الصادي

بعد الانسحاب	قبل الانسحاب
المعادلة القياسية $\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$	المعادلة القياسية $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$
مركزه النقطة $\overline{C}(h,k)$	مركزه نقطة الاصل C(0,0)
الرأسان $\overline{V1}(h,a+k),\overline{V2}(h,-a+k)$	الرأسان $V1(0,a),v2(0,-a)$
القطبان $\overline{M1}(b+h,k),\overline{M2}(-b+h,k)$	القطبان M1(b,0),M2(-b,0)
البؤرتان $\overline{F1}(h,c+k),\overline{F2}(h,-c+k)$	البؤرتان $F1(0,c),F2(0,-c)$
طول المحور الحقيقي =2a **معادلة محوره الحقيقي x=h**	طول محوره الحقيقي =2a معادلة محوره الحقيقي x = 0
طول محوره المرافق(التخيلي) =2b **معادلة محوره المرافق y=k**	طول محوره المرافق (التخيلي) =2b معادلة محوره المرافق y = 0





مثال :- جد احداثيا المركز والبؤرتين والرأسين وطول المحورين والاختلاف المركزي للقطع الزائد الذي معادلته :

$$\frac{(x+2)^2}{9}-\frac{(y-1)^2}{4}=1$$

$$\frac{(x+2)^2}{9}-\frac{(y-1)^2}{4}=1$$

بمقارنة بالمعادلة القياسية $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$

$\Rightarrow a^2=9 \Rightarrow a=3 \Rightarrow 2a=6$ وحدة طول المحور الحقيقي

$\Rightarrow b^2=4 \Rightarrow b=2 \Rightarrow 2b=4$ وحدة طول المحور المرافق

$\Rightarrow h=-2\ ,\ k=1$

$\therefore (h,k)=(-2,1)$ المركز

$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow c^2=9+4=13 \Rightarrow c=\sqrt{13}$

$\therefore \overline{F}_1(c+h,k)\ ,\ \overline{F}_2(-c+h,k)$ لان المحور الحقيقي يوازي محور السينات

$\Rightarrow \overline{F}_1(\sqrt{13}-2,1)\ ,\ \overline{F}_2(-\sqrt{13}-2,1)$ البؤرتان

$\overline{V}_1(a+h,k)\ ,\ \overline{V}_2(-a+h,k)$

$\overline{V}_1(1,1)\ ,\ \overline{V}_2(-5,1)$ الرأسان

$\therefore e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{13}}{3}>1$ (الاختلاف المركزي)

ملاحظه مهمه:-اذا اجتي المعادله ماتشبه الصوره القياسيه بالقطع الزائد او الناقص فلازم نحولها الى قياسيه باتباع الخطوات

1-نخلي كل متغير تربيعي وقرينه بالطرف الايسر وباقي الحدود بالطرف الايمن

2-نستخرج عامل مشترك من كل متغير تربيعي اذا جان معامله مو 1

3-نضيف مربع نصف معامل القرين للطرف الايسر وكل عدد تضيفه تضربه بالعامل المشترك وتضيفه للطرف الايمن

4-الان نستخدم طريقه (المربع الكامل) ونكمل الحل

التمارين الخاصه بالموضوع

1 . عين كل من البؤرتين والرأسين ثم جد طول كل من المحورين والاختلاف المركزي للقطوع الزائدة

$1)2(y+1)^2-4(x-1)^2=8]\div 8$

$\frac{(y+1)^2}{4}-\frac{(x-1)^2}{2}=1$ نقارنها بالمعادله القياسيه

$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$

$h=1\,,k=-1\to(h,k)=(1,-1)$

$a^2=4\to a=2\to 2a=4$ طول المحور الحقيقي , $x=1$ معادله المحور

$b^2=2\to b=\sqrt{2}\,,2b=2\sqrt{2}$ طول المحور التخيلي $y=-1$ معادله المحور

$c^2=a^2+b^2\to c^2=4+2\to c^2=6\to c=\sqrt{6}$

$F1(h,k+c)=(1,-1+\sqrt{6})$

$F2(h,k-c)=(1,-1-\sqrt{6})$ البورتان

$V1(h,k+a)=(1,1)$

$V2(h,k-a)=(1,-3)$ الراسان

$e=\frac{c}{a}\to e=\frac{\sqrt{6}}{2}$ الاختلاف المركزي

$7)16x^2+160x-9y^2+18y=185$

$16(x^2+10x)-9(y^2-2y)=185$ عامل مشترك

نضيف مربع نصف معامل القرين للطرف الايسر ونضربه بالعامل المشترك ونضيفه للطرف الايمن

$16(x^2+10x+25)-9(y^2-2y+1)=185+400-9$

$16(x+5)^2-9(y-1)^2=576$

$\frac{(x+5)^2}{36}-\frac{(y-1)^2}{64}=1$ بالمقارنه المعادله القياسيه

$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$

$h=-5\,,k=1\quad(h,k)=(-5,1)$ الراس

$a^2=36\to a=6\,,2a=12$ طول المحور الحقيقي , $y=1$ معادله المحور الحقيقي

$b^2=64\to b=8\quad,2b=16$ طول المحور المرافق , $x=-5$ معادله المحور التخيلي



$c^2 = a^2 + b^2 \to c^2 = 36 + 64 \to c^2 = 100 \to c = 10$
$F1(h + c, k) = (5, -1)$
$F2(h - c, k) = (-15,1)$ البؤرتان
$V1(h + a, k) = (1,1)$
$\mathrm{V2(h - a, k) = (-11,1)}$الراسان
$e = \frac{c}{a} \to e = \frac{5}{3} > 1$ الاختلاف المركزي



الآن للفائدة نطرح لكم وجه التشابه والاختلاف للقطع الناقص والزائد وملاحظات أضافية وأسئلة أثرائية

2a-1 معناها طول المحور الكبير او العدد الثابت .... بالقطع الناقص

2a معناها طول المحور الحقيقي العدد الثابت ....القطع الزائد

2b-2 طول المحور الصغير .... في القطع الناقص

2b طول المحور المرافق .... في القطع الزائد

2c-3 المسافة او البعد بين البؤرتين بالقطعين الزائد والناقص

** الطرف الايمن للقطعين لازم واحد واذا مو واحد نقسم ع العدد الموجود بالطرف الايمن علمود يصير واحد كذلك لازم معامل اكس تربيع وال واي تربيع واحد

** بالقطع الناقص الجبير هوه a (ومعادلة حلال المشاكل هي $a^2 = b^2 + c^2$)

** بالقطع الزائد الجبير هو c (ومعادلة حلال المشاكل هي $c^2 = a^2 + b^2$)

** اذا طلب ايجاد ثوابت بالقطوع لازم ينطينه فد معلومه نطلع منها a,b,c علمود تســـاعدنا بايجاد القيم المجهولة

** النسبة بين طولي محوري القطع الزائد $\frac{2a}{2b}$

** النسبه بين طولي محوري القطع الناقص بيها احتمالين

-1 $\frac{2a}{2b}$ اذا جان الرقم المنطي اكبر من واحد(ذكرت مره اخرى للتذكير)

-2 $\frac{2b}{2a}$ اذا جان الرقم المنطي اصغر من واحد (ذكرت مره اخرى للتذكير)

** مجموع طولي محوريه معنا 2a+2b= والفرق بين طولي محوري 2a-2b

** مجموع مربعي طولي محوريه $(2a)^2 + (2b)^2$ والفرق فقط ناقص بينهم

** مربع مجموع طولي محوريه $(2a + 2b)^2$



أ سئله أثرائية عن الفصل

س1 / قطع مكافئ رأسه نقطة الاصل ودليله x=1-h ويمر بالنقطة $(3h-2, 2\sqrt{2h})$ h>1 جد قيمة h ثم أكتب معادلة القطع المكافئ

س2/ قطع مكافئ معادلته $y^2+5x=4ax$ ودليله يمر بالنقطة (1,2) جد قيمة a ؟

ج/ $\frac{1}{4}$

س3/ أذا كان $ly+m=0$ معادلة دليل قطع مكافئ الذي بؤرتيه $(l+m,\frac{4-m}{9})$ جد قيمة l,mεR

ج (m=32,l=-8)

س4/ جد قيمة a,b εR التي تجعل المعادلة الآتية تمثل معادلة قطع مكافئ رأسه نقطة الاصل وبؤرتيه على محور السينات $y^{3a+b}=(a-b)x+(a-3b+4)$ ؟

ج $(b=\frac{7}{5}, a=\frac{1}{5})$

س5 / قطع مكافئ رأسه نقطة الاصل ويمر دليله بالنقطة (2h,h-m) ومعادلته $4hy-\frac{1}{5}x^{2m+h}=0$ جد قيمة h,m εR

ج $(m=\frac{12}{13}, h=\frac{2}{13})$

س6 / $(h+2)y^2+(h+1)x^2=19x-hx$ معادلة قطع مكافئ رأسه نقطة الاصل وبؤرته على أحد المحورين ما قيمة h واكتب معادلة البؤرة والدليل ؟

ج / $y^2=20x$, (h=-1)

س7/ أذا كانت $y^2-3hx=0$ معادلة قطع مكافئ دليله يمر بالنقطة (-3,5) جد قيمة h ؟

ج / h=4

س8 / أذا كانت y=2a هي معادلة دليل القطع المكافئ $x^2+ay-bx=3x+7y$ الذي رأسه نقطة الاصل جد قيمتي a,b εR

ج($b=-3\ ,\ a=-1$)

س9 / قطع مكافئ رأسه نقطة الاصل ومعادلته $y^2=ax+b+a(2x+1)$ ويمر بالنقطة (1,3) جد قيمة a,b ε R ثم جد بؤرته ومعادلة دليله ؟

ج/ (a=3 ,b=-3)

س10 / أذا كانت $mx=4y^2+(l+m)x^2$ معادلة قطع مكافئ رأسه نقطة الاصل ومعادلة دليله x+m=15 جد قيمتي m,l ؟

ج (m=16,l=-16)

س11/ القطع المكافئ $x^2=ky-6y$ معادلة دليله y=8 جد قيمة k ؟

ج/ k=-26

س12/ أذا كان x=3 دليل قطع مكافئ $y^2=(5n+3)x$ جد قيمة n ؟

ج / n=-3





س13/ القطع المكافئ يمر بالنقطتين المتناظرتين (1,2n) , $(-1,\frac{n}{2}+6)$ جد قيمة n ؟ ثم جد معادلة القطع ؟

ج / $(x^2 = \frac{1}{8}y$, n=4)

س14 / قطع مكافئ معادلته $x^2 = (3-m)y$ مركزه نقطة الاصـل ودليله يمر بالنقطة (8, -4) جد قيمة m

ج/ 35-

س15 /قطع مكافئ معادلته $y^2 + 16x = 0$ دليله يمر بالنقطة (2k,k) فما قيمة k ثم أرسم القطع ؟

ج/

س1/ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وطول محوره الكبير ضعف طول محوره الصغير ويمر ببؤرة القطع المكافئ الذي مركزه نقطة الاصل ومعادلته $y^2 = 12x$ ؟

ج/ $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{\frac{9}{4}} = 1, \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{36} = 1$

س2 / $x^2 = 12y, y^2 = Bx$ معادلتي قطعين مكافئين جد :

1- معادلة قطع ناقص أحدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ الاول ويمر ببؤرة القطع المكافئ الثاني ؟

2- معادلة قطع ناقص يمر ببؤرة القطعين المكافئين ؟

ج / $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, $\frac{x^2}{13} + \frac{y^2}{9} = 1$

س3/ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه تنتميان الى محور الصادات ويمر بالنقطة (2,2) وأختلافه المركزي $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ؟

ج/ $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{12} = 1$

س4/ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل ويمر برؤوس المثلث $(4,0)$, $(0,-3)$, $(-4,0)$؟

ج/ $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$

س5/ قطعان ناقصان مركزهما نقطة الاصل بؤرتا الاول $(-3,0)$, $(3,0)$ وبؤرتا الثاني $(0,-4)$, $(0,4)$ جد معادلتيهما أذا كان كل منهما يمر من بؤرتي الاخر ؟

$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$, $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

س6/جد معادلة قطع الناقص الذي بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ $y^2=12x$ والنقطة p تنتمي اليه بحيث أن $pf1$ عمودي على محوره الكبير وأن $pf2=10$ cm ؟ (تلميح / نرسم ونستخدم مبرهنة فيثاغورس ومن الرسم نستخرج المعطيات)؟

ج/ $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{72}=1$ ؟

س7/ قطع ناقص أحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $\frac{1}{2}y^2-4x=0$ فأذا كانت طول قطعة الوتر العمود على محوره الكبير $=10$ جد معادلة القطع الناقص ؟

ج/ $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ ؟

س8/ قطعان مخروطيان كل منهما ناقصان مركزيهما نقطة الاصل وكل منهما يمر ببؤرة الاخر فأذا كانت معادلة احدهما $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ جد معادلة الاخر ؟ (تلميح / ناقص يمر ببؤرة ناقص بؤرة الاول تصبح قطب للاخر والقطب يصبح بؤرة الاخر)

ج/ $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$



س9/ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطه الاصل وبؤرتاه على محور السينات والمسافة بين البؤرتين 8 وحدات ومجموع طولي محوريه المحورين يساوي 16 وحدة ؟

ج/ $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

س10/ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وطول محوره الاصغر 4 وحدات والبعد بين المركز والبؤرة 5 وحدات ؟

ج/ $\frac{x^2}{29} + \frac{y^2}{4} = 1$, $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{29} = 1$

تم اعداد الملزمة الاستاذ

حمزة حازم الكربلائي

للتواصل معي عبر معرف التلكرام @Math_Hamza

او الاتصال عبر الهاتف

07828808092









الخصوصي في
الرياضيات
الجزء الاول
الفصل الثالث
اعداد الاستاذ
حمزة حازم الكربلائي
للصف السادس العلمي
بفرعيه الاحيائي و التطبيقي
07828808092

الفصل الثالث:- تطبيقات التفاضل من اهم الفصول الي لازم نقراها لان عليها 40 درجة وزارية نجي ناخذ الفصل بكل تفاصيلة

➢ مراجعة المشتقات

- اشتقاق عادي يعني دالة عادية　B-اشتقاق الدالة الضمنية

➢ قواعد الاشتقاق للقسمين

1- مشتقة الدالة الثابتة تساوي صفر (شنو دالة ثابتة يعني دالة بس رقم مو متغير المتغير حرف مثل X;Y;Z هذني متغيرات)

$if\ y = a \rightarrow \frac{dy}{dx}=0$　　a رقم ثابت

$1) f(x) = 4 \rightarrow f'(x) = 0$　　$2)\ f(x) = \sqrt{2} \rightarrow f'(x) = 0$

2- مشـــتقة دالة المتغير يعني الي بيها متغير واحد (يعني متغير مرفوع لاس شـنسـوي_الاس ينزل في الدالة نفسه تنقص من الاس 1)

➢ $if\ y = x^n \rightarrow nx^{n-1}$

$1)\ f(x) = 3x^3 \rightarrow f'(x) = 9x^2$　　$2)\ f(x) = 5x^2 \rightarrow f'(x) = 10x$

3- المشـــتقة تتوزع على عملية الجمع والطرح (عندك متغيرات توزع عليهم الأشـــتقاق يعني تشتق كل واحد وحده)

$1) f(x) = x^3 + 2x^2 \rightarrow f'(x) = 3x^2 + 4x$

$2) f(x) = 2x^5 - x^4 \rightarrow f'(x) = 10x^4 - 4x^3$

4- مشتقة حاصل ضرب دالتين (الاولى * مشتقة الثانية + الثانية *مشتقة الاولى)

$f(x) = (x^2 + 5x + 1)(x + 3) \rightarrow f'(x) = (x^2 + 5x + 1) + (x + 3)(2x + 5)$

5- مشتقة قسمة دالتين

$$f'(x) = \frac{(\text{مشتقة المقام})(\text{البسط}) - (\text{مشتقة البسط})(\text{المقام})}{\text{المقام}^2}$$

6- مشتقة الثابت في الدالة (ينزل الثابت نفسه في مشتقة الدالة)

7- مشتقة الدالة الاسية (الي تتكون من حدين او اكثر) الاس مالته لا يساوي 1 (الاس ينزل في القوس نفسه ناقص الاس1 في مشتقة داخل القوس) كما في مثال g



ملاحظة:- رموز المشتقة

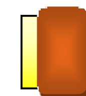
✓ يرمز للمشتقة الاولى بالرموز $y' \text{ or } \frac{dy}{dx} \text{ or } f'$

✓ يرمز للمشتقة الثانيه بالرموز $y'' \text{ or } \frac{d^2y}{dx^2} \text{ or } f''$

✓ يرمز للمشتقة الثالثه بالرموز $y''' \text{ or } \frac{d^3y}{dx^3} \text{ or } f'''$

ملاحظة مهمة:- منكدر نشتق الدالة الجذرية ألا نحولها الى دالة اسية علمود نكدر نطبق قاعدة مشتقة الدالة الاسية شلون نحول الدالة الجذرية الى اسية ↓↓↓↓↓

$$\sqrt[\text{دليل}]{(\text{دالة})^{\text{اس}}} \rightarrow (\text{الدالة})^{\frac{\text{اس}}{\text{دليل}}}$$



مثال :-جد مشتقة كل من الدوال الآتية

$a)\ f(x) = 10 \rightarrow f'(x) = 0$

$b)\ f(x) = 2x^5 \rightarrow f'(x) = 10x^4$

$c)\ f(x) = \sqrt[3]{x} \rightarrow f(x) = x^{\frac{1}{3}} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

$d)\ f(x) = 3x^2 + 6x \rightarrow f'(x) = 6x + 6$

$e)\ f(x) = y^2x^2 \rightarrow f'(x) = y^2 2x + x^2 2y$

$f)\ f(x) = \frac{x+1}{x-1} \rightarrow f'(x) = \frac{(x-1)(1) - (x+1)(1)}{(x-1)^2}$

$= \frac{x - 1 - x - 1}{(x-1)^2} = -\frac{2}{(x-1)^2}$

$g)\ f(x) = (x^3 + 5x)^2 \rightarrow f'(x) = 2(x^3 + 5x)(3x^2 + 5)$

ملاحظه:-اذا جان الاس كسر من نطرح واحد يكون الجواب كالاتي

$y = x^{\frac{3}{2}} \rightarrow y' = \frac{3}{2}\, x^{\frac{1}{2}}$ ← $\frac{(\text{البسط}-\text{المقام})}{\text{المقام}}$

الاشتقاق الضمني:- شوكت نشتق الدالة اشتقاق ضمني ؟

ج/ اذا جانت الدالة مو صريحة يعني دالة مو y او f(x) تساوي الدالة او تلكي الـx والـy بطرف واحد

طريقة الاشتقاق الداله الضمنيه

1)نشتق جميع الحدود حسب قواعد الاشتقاق ومن نشتق y نخلي بدالها y' او $\frac{dy}{dx}$

مثال/جد $\frac{dy}{dx}$ للدالة $x^2y^2 - 2y = 5x + 3$

هنا راح نشتق ضمني ليش لان دالة مو =y ولا = f(x) والـ y ويه x بجهة وحده

الحل /

نشتق ونحط $\frac{dy}{dx}$ بدل y

$$x^2 2y\frac{dy}{dx} + y^2 2x - 2\frac{dy}{dx} = 5$$

$$2x^2y\frac{dy}{dx} - 2\frac{dy}{dx} = 5 - 2xy^2$$

نخلي $\frac{dy}{dx}$ بجهه والحدود الباقيه بالجهه الثانيه

$$2x^2y - 2\frac{dy}{dx} = 5 - 2xy^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5 - 2xy^2}{2x^2y - 2}$$

ملاحظة مهمة -: اذا انطاني نقطة كلي جد الاشتقاق عند النقطة (x,y) من نشتق ونكمل نعوض النقطة ونطلع الناتج

تكمله للمثال اعلاه جد $\frac{dy}{dx}$ عند (2,3) \ واجب



مشتقة الدوال الدائرية

الدالة	المشتقة
sin(زاوية)	cos(زاوية) * مشتقة الزاوية
cos(زاوية)	−sin(زاوية) * مشتقة الزاوية
tan(زاوية)	sec^2(زاوية) * مشتقة الزاوية
cot(زاوية)	$-csc^2$(زاوية) * مشتقة الزاوية
sec(زاوية)	sec(زاوية) tan(زاوية) * مشتقة الزاوية
csc(زاوية)	−csc(زاوية) cot(زاوية) * مشتقة الزاوية

ملاحظة :- اذا جان اس الدالة اكبر من 1 طريقه الاشتقاق

$f'(x) =$ الاس * الدالة ناقص الاس واحد * مشتقة الدالة * مشتقة الزاويه

$$f(x) = \sin^3(2x) \rightarrow f'(x) = 3 * \sin^2(2x) \ * \cos(2x) * 2$$

مثال(1 كتاب) اذا كانت $y = \cos 2x$ فجد $\frac{d^4y}{dx^4}$

معناها يريد منك تشتق اربع مرات

$$\frac{dy}{dx} = -\sin(2x)\,2 = -2sin2x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -2(cos2x)(2) = -4cos2x$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -4(-sin2x)(2) = 8sin2x$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = 8(cos2x)(2) = 16cos2x$$

مثال(2 كتاب)/ اذا علمت بأن $y^2+x^2=1$ فبرهن على ان $y\frac{d^3y}{dx^3}+3\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{dy}{dx}=0$

$$y^2+X^2=1 \to (2y\frac{dy}{dx}+2x=0)\div 2$$

$$y\frac{dy}{dx}+x=0$$

$$y\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dy}{dx}+1=0$$

$$y\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1=0$$

$$y\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{dy}{dx}+2\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{d^2y}{dx^2}+0=0$$

$$y\frac{d^3y}{dx^3}+3\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

(تمرين 4) اذا كانت $y=x\sin x$ فبرهن ان $y^{(4)}-y+4\cos x=0$

$$y=xsinx$$

$$y'=x(cosx).1+sinx.1\to=xcosx+sinx$$

$$y''=x(-sinx)(1)+cosx(1)+cosx=-xsinx+2cosx$$

$$y'''=-x(cosx)+\sin x(-1)+2(-\sin x)=-xcosx-sinx-2sinx$$

$$=-xcosx-3sinx$$

$$y''''=-x(-sinx)+\cos x(-1)-3cosx$$

$$y''''=xsinx-cosx-3cosx$$

$$y''''=xsinx-4cosx$$

$$y''''=-xsinx+4cosx=0 \to y^4=-y+4cosx=0$$



مثال:- جد y′ او f′(x)

$1) f(x) = \sin(4x) \rightarrow f'(x) = \cos(4x) * 4 = 4\cos(4x)$
$2) f(x) = 7\cos(2x) \rightarrow f'(x) = 7 * -\sin(2x) * 2 = -14\sin(2x)$
$3) f(x) = \tan(x^2 + 3) \rightarrow f'(x)$

$= \sec^2(x^2 + 2) * 2x = 2x\sec^2(x^2 + 2)$

تمارين (3-1)

1-جد $\frac{d^2y}{dx^2}$ لكل مما يلي

$a) f(x) = \sqrt{2 - x} \quad \forall x < 2$

$f(x) = (2 - x)^{\frac{1}{2}}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(2 - x)^{\frac{-1}{2}}(-1) = -\frac{1}{2}(2 - x)^{-\frac{-1}{2}}$

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{4}(2 - x)^{-\frac{-3}{2}}(-1) = -\frac{1}{4}(2 - x)^{-\frac{-3}{2}}$

$= -\frac{1}{4\sqrt{(2-x)^3}}$

$b) y = \frac{2 - x}{2 + x} \quad x \neq 2$

$\frac{dy}{dx} = \frac{(2 + x)(-1) - (2 - x)(1)}{(2 + x)^2} = \frac{-2 - x - 2 + x}{(2 + x)^2} = \frac{-4}{(2 + x)^2}$

$\frac{d^2\,y}{dx^2} = \frac{(2 + x)^2(0) - (-4).2(2 + x)(1)}{(2 + x)^4} \rightarrow = \frac{8(2 + x)}{(2 + x)^4} = \frac{8}{(2 + x)^3}$

$c)\ 2xy-4y+5=0\ ,\ y\neq 0,\ x\neq 0$

$2xy-4y+5=0 \rightarrow 2xy-4y=-5$

$y(2x-4)=-5 \rightarrow y=-\frac{5}{2x-4}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{(2x-4)*0-(-5)*2}{(2x-4)^2}=\frac{10}{(2x-4)^2}$

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(2x-4)^2.(0)-10.2(2x-4)(2)}{(2x-4)^4}=\frac{-40(2x-4)}{(2x-4)^4}=\frac{-40}{(2x-4)^3}$

$=-\frac{40}{(2)^3(x-2)^3} \rightarrow =-\frac{40}{8(x-2)^3}=-\frac{5}{(x-2)^3}$

2-جد $f'''(1)$ لكل مما ياتي

$a)\ f(x)=4\sqrt{6-2x}\ \ \forall x<3$

$f(x)=4(6-2x)^{\frac{1}{2}} \rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}.4(6-2x)^{-\frac{1}{2}}(-2)$

$=-4(6-2x)^{-\frac{1}{2}}$

$f''=-\frac{1}{2}(-4)(6-2x)^{-\frac{3}{2}}\ \ (-2) \rightarrow =-4(6-2x)^{-\frac{3}{2}}$

$f'''(x)=-\frac{3}{2}(-4)(6-2x)^{-\frac{5}{2}}(-2) \rightarrow =-12(6-2x)^{-\frac{5}{2}}=\frac{-12}{\sqrt{(6-2x)^5}}$

$f'''(1)=-\frac{12}{\sqrt{(6-2(1))^5}}=-\frac{12}{\sqrt{(6-2)^5}}=-\frac{12}{\sqrt{(4)^5}}=-\frac{12}{(2)^5}=-\frac{12}{32}=-\frac{3}{8}$

$b)\ f(x)=\sin\pi x$

$f(x)=\sin\pi x$

$f'(x)=\pi\cos\pi x$

$f''(x)=\pi(-\sin\pi x)(\pi)=-\pi^2\sin\pi x$

$f'''(x)=-\pi^2(\cos\pi x)(\pi)=-\pi^3\cos\pi x$

$f'''(x)=-\pi^3\cos(\pi.1)=-\pi^3\cos\pi=-\pi^3(-1)=\pi^3$



$c) f(x) = \frac{3}{2-x}\ ,\ x \neq 2$

$$f^{/} = \frac{(2-x).0 - 3(-1)}{(2-x)^2} \rightarrow \frac{3}{(2-x)^2}$$

$$f^{//} = \frac{(2-x)^2.0 - 3.2(2-x)(-1)}{(2-x)^4} = \frac{6(2-x)}{(2-x)4} = \frac{6}{(2-x)^4}$$

$$f^{///} = \frac{(2-x)^3.0 - 6.3(2-x)^2(-1)}{(2-x)^6} = \frac{18(2-x)^2}{(2-x)^6} = \frac{18}{(2-x)^4}$$

$$f^{///}(1) = \frac{18}{(2-1)^4} = \frac{18}{1} = 18$$

3) اذا كانت $y = \tan x$ فبرهن $\frac{d^2y}{dx^2} = 2y(1+y^2)$

حيث $\forall n \in z$ $x \neq \frac{(2n+1)\pi}{2}$

$$y = tanx \rightarrow \frac{dy}{dx} = sec^2x.1$$

$$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$$

$$\frac{dy}{dx} = sec^2x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2\sec x \cdot \sec x \tan x$$

$$= 2\ \sec^2 x \tan x$$

$$= 2\ (1 + \tan^2 x) \tan x$$

$$= 2y(1+y^2)$$

امثلة واجب



1) $f(x) = \frac{3}{x}$

2) $f(x) = x^3 + 4$

3) $y = 2x + 5$

4) $y = (2x^2 + 3x)^2$

5) $f(x) = \sin(3x - x^2)$

6) $f(x) = \cos\left(\frac{2}{x}\right)$

7) $f(x) = \sec(2x - \pi)$

8) $f(x) = \frac{3x + 1}{2x - 6}$

9) $f(x) = (x - 2)(x + 1)^2$

10) $f(x) = \sqrt{x}$



11) جد dy/dx للعلاقه $x^3y^2 - 2y = 5x + 3$



المعدلات الزمنية

مهمة جداً

1- اول شغلة هاي المعادلات تشتق بنسبة للزمن t يعني من اشتقاق x هو $\frac{dx}{dt}$ واشتقاق y هو $\frac{dy}{dt}$

تعميم نقطه 1 اشتقاق اي متغير هو $\frac{d(\text{اسم المتغير})}{dt}$ واشتقاق الثابت هو 0

2- نرسم مخطط توضيحي اذا جان السؤال يطلب ونرمز للمجهول والمعلوم ونعينهم على الرسم

4- تكتب العلاقة الي راح تشتغل عليها الي هي تربط بين متغيرات السؤال وتشتقها وهسه نوضح شلون نطلع العلاقة

5- نشتق العلاقة الي طلعتها اني بالنسبة للزمن يكون الاشتقاق حسب 1

6- نعوض معطيات السؤال علمود نستخرج المجهول

7- لا تعوض المعلومات الابعد الاشتقاق

ملاحظات مهمة جدا :-

1- اكو عدنة علاقة اساسية وعلاقة ثانوية

نجي للسؤال نحط العلاقة الرئيسية نشتقها بالنسبة للزمن نشوف كم متغير بيها اذا بيها متغير واحد مباشر نحل اما اذا بيها متغيرين بالسةال هنا لازم اكو علاقة ثانوية نقلل بيها عدد المجاهيل او نطلع قيمة احد المجاهيل ونعوضها بالعلاقة الرئيسية

2- اكو ثابت ينطي بالسؤال هذا تعوضه قبل لا تشتق زين شلون نعرفه ، نعرفه من السؤال ما يذكر بي تغير ابدا

3- من راح يطلب منك معدل لو سرعة لو حركة نحط موجب اذ جان تزايد او أبتعاد ونحط سالب اذ جان تناقص او أقتراب



بعض قوانين الاشكال الهندسيه

الشكل	المحيط	المساحة
1-المربع	4 × طول الضلع	طول الضلع ×نفسه
2-مستطيل	(الطول +العرض)×2	طول ×العرض
3-دائره	النسبه الثابته× القطر $2\pi r$	النسبه الثابته×نصف القطر تربيع πr^2
4-مثلث	مجموع اضلاعه الثلاثه	½ القاعده× الارتفاع

الشكل	المساحة الجانبيه	المساحة السطحيه	الحجم
المكعب	$4.(\text{طول الضلع})^2$ $4x^2$	$6.(\text{طول الضلع})^2$ $6x^2$	$(\text{طول الضلع})^3$ x^3
متوازي المستطيلات	محيط القاعده*الارتفاع 2(x+y)h	المساحة الجانبيه+2مساحه القاعده $2\pi rh + 2\pi r^2$	مساحه القاعده*الارتفاع $\pi r^2 h$
الكره		4*مساحه القاعده $4\pi r^2$	$\frac{4}{3}\pi r^3$
المخروط	$\pi r L$	$\pi r(L + r)$	$\frac{1}{3}\pi r^2 . h$

اخذنا قوانين واخذنا ملاحظات وشلون نحل بقه عدنه راح نجزء المعادلات الزمنية الى اربع ملاحظات
(من يجي سؤال نشوفه ليا جزء ونحل حسب الملاحظة التابعة الة)





ملاحظات المعدلات الزمنيه

ملاحظة 1

اذا انطه معدل تغير لي شكل هندسي (مكعب مستطيل الخ..) او طلب معدل تغير هنا الي طلبه هو راح يكون علاقة اساسية الي اشتقها ونعوض بيها

مثلا:- طلب منك جد معدل تغير حجم المكعب معناها تكتب قانون الحجم وتشتغل عليه

مثلا:- انطاك معدل تغير المساحة السطحية معناها تكتب قانون المساحة وتشتغل عليه

وزاري

مثال :- مكعب من الثلج يذوب بالحرارة بحيث يحافظ على شكله مكعبا فاذا كان معدل تغير حجمه يساوي $3m^3/s$ جد معدل تغير المساحة السطحية في اللحظة التي يكون طول حرفه 8m

الحل:-

اول شي من كلي معدل تغير حجم يعني نكتب قانون الحجم

حجم المكعب = $(\text{طول الضلع})^3$

$v = r^3$ نشتق العلاقة

$$\frac{dv}{dt} = 3r^2\frac{dr}{dt} \to -3 = 3(8)^2\frac{dr}{dt} \to \frac{dr}{dt} = -\frac{1}{64}$$

$A = 6r^2$ نشتق العلاقة

$$\frac{dA}{dt} = 12r\frac{dr}{dt} \to \frac{dA}{dt} = 12 * 8 * -\frac{1}{64}$$

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{3}{2}m^2/s$$ معدل تغير المساحة السطحية

نحذف السالب ونكتب العباره (معدل نقصان المساحه السطحيه $\frac{3}{2}m^2/s$)

ملاحظه:-اذا ذكر الك بالسوال كلمه (يتسرب , يتناقص , يذوب, يقترب) راح تكون الاشاره لازم سالبه

مثال :- صفيحة مستطيلة من المعدن مساحتها تساوي $96cm^2$ يتمدد طولها بمعدل 2cm/s بحيث تبقى مساحتها ثابتة جد معدل النقصان في عرضها وذلك عندما يكون عرضها 8cm

نفرض الطول =X فرض العرض=Y مساحه المستطيل =A

ملاحظة مهمة جداا:- الثابت الدائم (الي ميذكر بي اي تغير) يعوض قبل الاشتقاق والمتغير الدائم (الي يذكر بي تغير مثل –اللحظة التي يكون – عندما يكون - في لحظة ما - عندما يصبح) يعوض بعد الاشتقاق وأحياناً يعوض قبل الاشتقاق علمود نطلع قيمة متغير دائم اخر

$X=?\ \ y=8\ \ \frac{dx}{dt}=2\ ,\frac{dy}{dt}=?$

$96=x.y$

A=96 y

x

$96=x8\rightarrow x=\frac{96}{8}=12$ حسب الملاحظة

$96=x.y\ldots\ldots$ نشتق العلاقة

$0=x\frac{dy}{dt}+y.\frac{dx}{dt}$

$0=12\frac{dy}{dt}+(8).(2)$

$0=12\frac{dy}{dt}+16\rightarrow -12\frac{dy}{dt}=16\rightarrow \frac{dy}{dt}=-\frac{16}{12}=-\frac{4}{3}$

$\frac{4}{3}$ معدل تغير النقصان



مثال :- خزان مملوء بالماء على شكل متوازي سطوح قاعدته مربعة طول ضلعها 2m يتسرب منه الماء بمعدل $0.4m^3/h$ جد معدل تغير انخفاض الماء في الخزان عند اي زمن

الحل/ نفرض الحجم =v , نفرض الارتفاع =h , طول القاعدة =x

$$\frac{dv}{dt}=0.4 \;,\quad \frac{dh}{dt}=? \quad x=2$$

$$v=x^2h$$

$$v=(2)^2.h=4h$$

$$\frac{dv}{dt}=4\frac{dh}{dt}$$

$$-0.4=4\frac{dh}{dt}\rightarrow\frac{dh}{dt}=-\frac{0.4}{4}=-0.1\;\;m/s$$

معدل تغير انخفاض الماء في الخزان 0.1m/h

مثال :-مكعب صلد طول حرفه 8cm مغطى بطبقة من الجليد بحيث يحافظ على شكله مكعبا فاذا بدأ الجليد بالذوبان بمعدل $6cm^3\backslash s$ فجد معدل النقصان بسمك الجليد في اللحظة التي يكون فيها سمك الجليد 1m

الحل :- نفرض سمك الجليد =x

هنا صار عندي مكعبين مكعب الاساس بدون الجليد نسميه الصغير

ومكعب الي هو الصغير وشوي فوكاه جليد صار مكعب كبير

هسه طول ضلع مكعب الصغير $v1=(8)^3$

طول ضلع المكعب الكبير $v2=(8+2x)^3$ ليش صار وياه 2x لان ضفنه الجليد من جهتين جهه x والثانيه x صار2x نضيفه للصغير الناتج منهم مكعب كبير (التوضيح اعلاه ليس من ضمن الحل)

الحجم الكلي = حجم المكعب الكبير- حجم مكعب الصغير

$V=V2-V1\rightarrow=(8+2X)^3-(8)^3$ نشتق العلاقة

$$\frac{dv}{dt}=3(8+2x)^2.2\frac{dx}{dt}+0\rightarrow-6=3\big(8+2(1)\big)^2.2\frac{dx}{dt}$$

$\frac{dx}{dt}=-\frac{1}{100}m/s\rightarrow\frac{dx}{dt}=-0.01m/s$ معدل تغير سمك الجليد

معدل نقصان سمك الجليد 0.01m/s

ملاحظة :- اذا جان عدنه سؤال مو مكعب مثلا كرة حديدية او اي كرة هنا الجليد يكون من جهة واحدة يعني نفرضه x مو 2x

مثال واجب:-كره حديديه نصف قطرها 4cm مغطاة بطبقه من الجليد فاذا كان الجليد يذوب بمعدل $10\text{cm}^3/s$ جد سرعه نقصان سمك الجليد في اللحظه التي يكون فيها سمك الجليد 2cm

ملاحظه 2

اذا اجه سؤال ووطلعلي بالرسم مثلثات متشابه او مثلثات مداخله (راح نطبق هنا علاقة تشابه مثلثين) ونكدر نعوض عن علاقة التشابه بالدوال المثلثية sin ,cos,tan

مثال// مرشح مخروطي قاعدته أفقيه ورأسه الى الاسفل ارتفاعه يساوي 24cm وطول قطر قاعدته 16cm يصب فيه الماء بمعدل $5cm^3/s$ بينما يتسرب منه السائل بمعدل $1cm^3/s$ جد معدل تغير عمق السائل في اللحظة التي يكون فيها عمق السائل 12cm

الحل:-

نفرض حجم السائل عند اي لحظة=v نفرض الارتفاع =h نصف القطر =r

معدل حجم الماء5 راح (يتسرب منه 1) يعني يصير 4

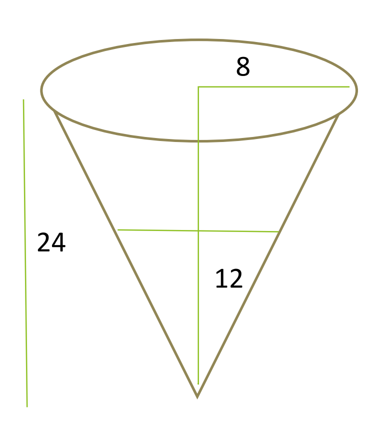
$$\frac{dv}{dt} = 5 - 1 = 4cm^3/s, \frac{dh}{dt} = ?, r = ?, \frac{dr}{dt} = ?\ , h = 12$$

$$v = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$ نكتب قانون الحجم



لو نشتق هنا العلاقة راح يطلع عدنة مجهولين بيها فلازم مني ادور على علاقة ثانوية الي هي تشابه المثلثين او اي داله ضمن الملاحظة الي فوك (راح نستخدم tan)

$$tan\emptyset = \frac{r}{h} = \frac{8}{24} \to \frac{1}{3} = \frac{r}{h} \to 3r = h \to r = \frac{h}{3}$$



طبقت العلاقه فقللت عدد المتغيرات

$$v = \frac{\pi}{3}\left(\frac{h}{3}\right)^2 . h$$ نعوض ثم نشتق

$$= \frac{\pi}{3} . \frac{h^2}{9} . h$$

$$v = \frac{\pi}{27} . h^3$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\pi}{27} . 3h^2 \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\pi}{9} h^2 \frac{dh}{dt}$$

$$4 = \frac{\pi}{9}(12)^2 \frac{dh}{dt} \to 4 = 16\pi \frac{dh}{dt}$$

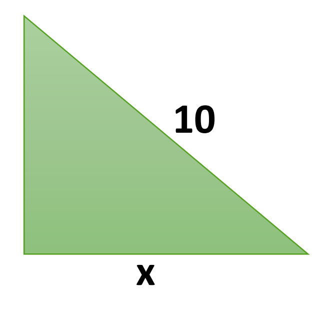
$$\frac{dh}{dt} = \frac{4}{16\pi} = \frac{1}{4\pi}\ cm/s$$

ملاحظة 3

اذا لكينه مثلث قائم الزاوية بالسؤال فالعلاقة راح تكون مثلث فيثاغورس
(اذا علم بيها ضلعين والضلع الثالث مجهول فراح تكون فيثاغورس علاقة اساسية وثانوية)

مثال \\ سلم طوله 10m يستند بطرفه العلوي على حائط رأسي وبطرفه السفلي على ارض افقية فاذا انزلق الطرف السفلي مبتعدا عن الحائط بمعدل 2 m/sec عندما يكون الطرف الاسفل على بعد 8m من الحائط جد :

1) معدل انزلاق طرفه العلوي .
2) سرعة تغير الزاوية بين السلم والارض .



الحل /

a- نفرض بعد قاعدة السلم عن الحائط x

نفرض بعد راس السلم عن الارض y

$$x^2 + y^2 = (10)^2$$

$$(8)^2 + y^2 = 100$$

$$y^2 = 100 - 64 \to y^2 = 36 \to y = 6$$

نشتق علاقة فيثاغورس لان هي علاقة ثانوية وعلاقة اساسية

$$x^2 + y^2 = 10$$

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0 \to (2)(8)(2) + (2)(6).\frac{dy}{dt} = 0$$

$$32 + 12\frac{dy}{dt} = 0 \to 12\frac{dy}{dt} = -32 \to \frac{dy}{dt} \to = -\frac{32}{12} = -\frac{8}{3}m/s$$

$$\sin \emptyset = \frac{y}{10}$$ نشتقها

$$\cos \emptyset \frac{d\emptyset}{dt} = \frac{1}{10}\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{8}{10}\frac{d\emptyset}{dt} = \frac{1}{10}.\left(-\frac{8}{3}\right) = \frac{d\emptyset}{dt} \to -\frac{1}{3}$$

نكرر نطبق هنا tan or cos بدل الـ sin

ملاحظة:- الاغلب من أمثلة السلم او الطرق المتعامدة تكون العلاقة مثلث فيثاغورس

ملاحظة4

اذا ذكر بالســـؤال معادلة منحني وجان المطلوب اومعلوم نقطه تقع على نفس المنحني فراح يكون عدنه علاقه المنحني الي ذكرها هي علاقه اساسيه وهي الي نشتقها

- اما اذا ذكر معادلة منحني وجان اكو (معدل ابتعاد او اقتراب نقطة تقع على المنحني) ونقطة ثانية ثابتة خارج المنحني فالعلاقة الي راح نطبقها هي المسافة بين نقطتين هي اساسية وهي الي اشتقها ومعادلة المنحني علاقة ثانوية

شلون افرق هل معادلة المنحني علاقة اساسية لو ثانوية (من خلال النقطة الثابتة) اذا لكيناها معنا علاقة ثانوية

مثال :- لتكن M نقطة متحركة على منحني القطع المكافى $y^2 = 4x$ بحيث يكون معدل ابتعادها عن النقطة (7,0) 0.2unit/s جد المعدل الزمني لتغير الاحداثي الســـيني للنقطة m عندما يكون x=4

$$D = \sqrt{(x-7)^2 + (y-0)^2} \rightarrow D = \sqrt{x^2 - 14x + 49 + y^2} \rightarrow (1)$$

$y^2 = 4x$ نعوضها ب 1

$$D = \sqrt{x^2 - 14x + 49 + 4x} \rightarrow D = \sqrt{x^2 - 10x + 49}$$ هسه نشتق

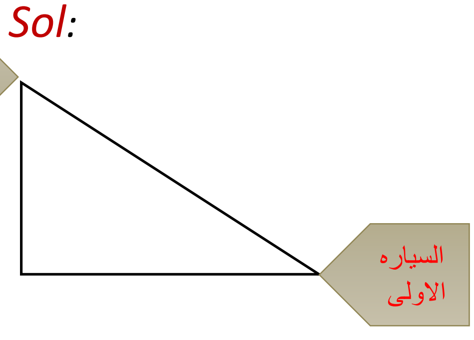
$$\frac{dD}{dt} = \frac{2x\frac{dx}{dt} - 10\frac{dx}{dt}}{2\sqrt{x^2 - 10x + 49}} = \frac{2\frac{dx}{dt}(x-5)}{2\sqrt{x^2 - 10x + 49}} = 0.2 = \frac{\frac{dx}{dt}(4-5)}{\sqrt{4^2 - 10(4) + 49}}$$

$$0.2 = -\frac{\frac{dx}{dt}}{\sqrt{16 - 40 - 49}} \rightarrow 0.2 = -\frac{\frac{dx}{dt}}{\sqrt{25}} \rightarrow -\frac{dx}{dt} = 0.2 * 5 \rightarrow \frac{dx}{dt} = -1$$



2009/د1/ طريقان متعامدان يلتقيان بنقطة *M* تحركت سيارتان من نقطة *M* كل منهما في طريق وكان معدل سرعة السيارة الاولى *80 k/h* ومعدل سرعة السيارة الثانية *60 k/h* جد معدل الابتعاد بين السيارتين بعد ربع ساعة من بدأ الحركة من نقطة *M* .

Sol:



في اية لحظة

نفرض بعد السيارة الاولى عن نقطة =*X*

نفرض بعد السيارة الثانيه عن نقطة = *y*

نفرض البعد بين السيارتين = *Z*

$$\frac{dx}{dt} = 80 \quad , \quad \frac{dy}{dt} = 60 \quad , \quad t = \frac{1}{4} \quad , \frac{dz}{dt} = ?$$

$$Z^2 = x^2 + y^2$$ نشتق

$$2Z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$$

$$x = (80)\left(\frac{1}{4}\right) = 20$$

$$y = (60)\left(\frac{1}{4}\right) = 15$$

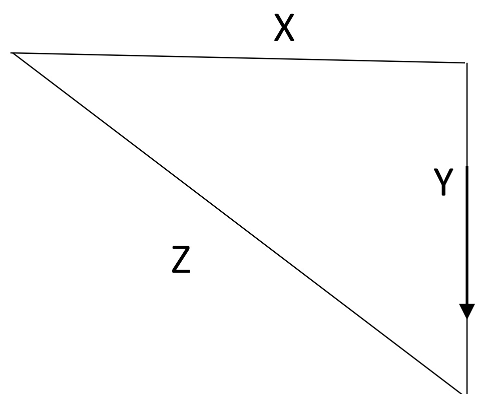
$$z^2 = (20)^2 + (15)^2$$

$$z^2 = 400 + 225 = 625 \quad \rightarrow z = 25$$

$$2(25)\frac{dy}{dt} = 2(20)(80) + 2(15)(60)$$

$$\frac{dy}{dt} = 100 \ \ k/h$$

مثال :-ابحرت سفينة من ميناء في الساعة السادسة صباحا واتجهت نحو الغرب بسرعة 20 k/h وفي الساعة الثامنة صباحا ابحرت سفينة اخرى من نفس الميناء متجه نحو الجنوب بسرعة 25 k/h اوجد سرعة تباعدهما في الساعة الحادية عشر .



نفرض بعد السفينة الاولى عن الميناء =X

نفرض بعد السفينة الثانيةعن الميناء = Y

البعد بين السفينتين = Z

$Z^2 = X^2 + y^2$ نشتقها

$$2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$$

$$X = (5)(20) = 100$$

$$y = (3)(25) = 75$$

$$z^2 = (100)^2 + (75)^2 \rightarrow z^2 = 15625 \rightarrow z = 125$$

$$2(125)\frac{dz}{dt} = 2(100)(20) + 2(75)(25) \rightarrow \frac{dz}{dt} = 31\ k/h$$

مثال :-مصباح على ارتفاع (6.4) متر مثبت على عمود شاقولي وشخص طوله (1.6) متر يتحرك مبتعدا عن العمود بسرعه 30m/min جد سرعه تغير طول ظل الرجل

الحل :-

نفرض بعد الرجل عن العمود = x

نفرض طول ظل الرجل = y

مثلث داخل مثلث معناه علاقه تشابه مثلثين

6.4

1.6

X+y

$$\frac{6.4}{1.6} = \frac{x+y}{y} \rightarrow 4 = \frac{x+y}{y} \rightarrow x + y = 4y \rightarrow x = 4y - y \rightarrow x = 3y$$

$$\frac{dx}{dy} = 3\frac{dy}{dx} \rightarrow 30 = 3\frac{dy}{dx} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{30}{3} = 10\ m/\min$$

واجبات :-وزاريه واثرائيه

س1:-2007د1\صندوق على شكل متوازي سطوح مستطيله قاعدته مربعه فاذا كان ارتفاعه يساوي ضعف طول قاعدته فاوجد معدل التغير في مساحته الكليه اذا كان طول ضلعه 8cm والتغير في طول ضلعه cm/s ½ ج\80

س2:-2017د2\متوازي مستطيلات قاعدته مربعه الشكل يزداد طول ضلعها بمعدل (0.4cm/s) بحيث يبقى الحجم ثابت دائما (640) فاوجد معدل التغير في الارتفاع في اللحظه التي يكون فيها الارتفاع 10cm

س3:-تتحرك نقطه على منحني قطع مكافى $y = x^2$ جد احداثي هذه النقطه في اللحظه التي يتساوى فيها المعدلان الزمنيان لتغير كل من الاحداثي x,y ؟

س4:-مرشح مخروطي قاعدته افقيه وراسيه للاسفل ارتفاعه 24cm وطول قطر قاعدته 16cm يصب فيه سائل بمعدل $5cm^3/s$ بينما يتسرب منه السائل$1cm^3/s$ جد معدل تغير نصف قطر السائل في اللحظه التي يكون فيها نصف القطر 4cm

س5:-بالون كروي يزداد حجمه بمعدل 0.4 cm^3/s بحيث يبقى شكل كره جد معدل ازدياد مساحته السطحيه عندما يكون قطره 10cm



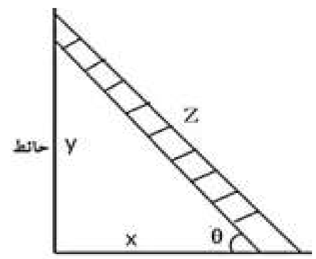
تمارين (2-3)

1- سلم يستند طرفه الاسفل على ارض أفقية وطرفه الاعلى على حائط راسي فاذا انزلق الطرف الاسفل مبتعدا عن الحائط بمعدل 2m/s جد معدل انزلاق طرفه العلوي عندما يكون قياس الزاوية بين السلم والارض تساوي $\frac{\pi}{3}$

الحل /

نفرض بعد الطرف الاسفل من الحائط =x نفرض طول السلم (الوتر) عدد ثابت = z

نفرض بعد الطرف الأعلى عن الارض =y



$x^2 + y^2 = z^2 \dots \dots \dots (1)$ نشتقها

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$$

ليش ما عوضنه بيها لان بيها مجهولين لازم يكون عندي علاقة ثانية اقلل بيها المجاهيل

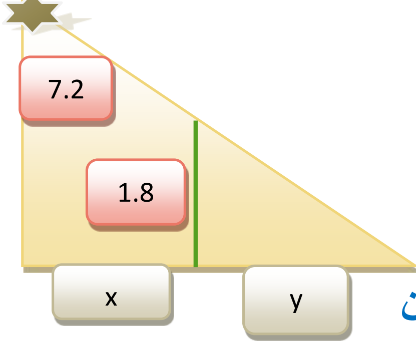
$$\tan\frac{\pi}{3} = \frac{y}{x} \to \sqrt{3} = \frac{y}{x} \to y = \sqrt{3}x \dots \dots . . (2) in\ 1$$

$$2x(2) + 2\sqrt{3}x\frac{dy}{dx} \to 2\sqrt{3}x\frac{dy}{dx} = -4x \to \frac{dy}{dx} = -\frac{2}{\sqrt{3}}\ m/s$$

2- عمود طوله 7.2m في نهايته مصباح يتحرك رجل طوله 1.8m مبتعدا عن العمود وبسرعه 30m/min جد معدل طول ظل الرجل

1- نفرض البعد بين قدم الرجل وقاعدة العمود=x نفرض طول ظل الرجل y

الحل/



لو نشوف الرسم عندي مثلثين متشابهين يعني علاقة تشابه مثلثين

$$\frac{d\emptyset}{dt} = 30 , \frac{dy}{dt} = ?$$

$$\frac{1.8}{y} = \frac{7.2}{x+y} \rightarrow \frac{1}{4} = \frac{y}{x+y}$$ طرفين في وسطين

$$x + y = 4y \rightarrow x = 3y$$ نشتقها

$$\frac{dx}{dt} = 3\frac{dy}{dt} \rightarrow 3\frac{dy}{dt} = 30 \rightarrow \frac{dy}{dt} = 10m/min$$

3- لتكن m نقطة تتحرك على القطع المكافى $y = x^2$ جد احداثي النقطة m عندما يكون المعدل الزمني لابتعادها عن النقطة (0, 3/2) يساوي ثلثي المعدل الزمني للتغير الاحداثي الصادي للنقطة m

$$s = \sqrt{(x-0)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2}$$

$$s = \sqrt{x^2 + y^2 - 3y + \frac{9}{4}}$$

$y = x^2$ نعوضها

$$s = \sqrt{y + y^2 - 3y + \frac{9}{4}} \rightarrow s = \sqrt{y^2 - 2y + \frac{9}{4}}$$ نشتق هاي العلاقة



$$\frac{ds}{dt}=\frac{2y\frac{dy}{dx}-2\frac{dy}{dx}}{2\sqrt{y^2-2y+\frac{9}{4}}}\rightarrow\frac{ds}{dt}=\frac{2\frac{dy}{dt}(y-1)}{2\sqrt{y^2-2y+\frac{9}{4}}}$$

$$\frac{ds}{dt}=\frac{\frac{dy}{dt}(y-1)}{\sqrt{y^2-2y+\frac{9}{4}}}\rightarrow\frac{2}{3}\frac{dy}{dt}=\frac{\frac{dy}{dt}(y-1)}{\sqrt{y^2-2y+\frac{9}{4}}}$$

$3y-3=2\sqrt{y^2-2y+\frac{9}{4}}$ (بالتربيع) $\rightarrow 9y^2-18y+9=4\left(y^2-2y+\frac{9}{4}\right)$

$9y^2-18y+9=4y^2-8y+9\rightarrow 9y^2-18y+9-4y^2+8y-9=0$

$(5y^2-10y=0)\div 5\rightarrow y^2-2y=0\rightarrow y(y-2)=0$

اما $y=0\rightarrow x^2=0\rightarrow x=0$ تهمل

او $y-2=0\rightarrow y=2\rightarrow x^2=2\rightarrow x\mp\sqrt{2}\rightarrow(\mp\sqrt{2},2)$

4- جد مجموعة النقط التي تنتمي الى الدائرة $x^2+y^2+4x-8y=108$ والتي يكون عندها المعدل الزمني لتغير x مساويا للمعدل الزمني لتغير y بالنسبة للزمن

$let\ m(x,y)\quad;\frac{dx}{dt}=\frac{dy}{dt}$

$x^2+y^2+4x-8y=108$ نشتقها

$2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}+4\frac{dx}{dt}-8\frac{dy}{dt}=0$

$2x\frac{dx}{dt}+4\frac{dx}{dt}=8\frac{dy}{dt}-2y\frac{dy}{dt}$

$(2x+4)\frac{dx}{dt}=(8-2y)\frac{dy}{dt}$

$\because\frac{dx}{dt}=\frac{dy}{dt}\quad[(2x+4)=(8-2y)]\div 2\rightarrow x+2=4-y$

$y=2-x\ldots\ldots 1$ نعوضها بمعادلة الدائرة

$x^2+(2-x)^2+4x-8(2-x)-108=0$

$x^2+4-4x+x^2+4x-16+8x-108=0$

$2x^2+8x-120=0\rightarrow x^2+4x-60=0\rightarrow(x+10)(x-6)=0$

$x=-10\rightarrow y=2+10=12$

$x = 6 \rightarrow 2 - 6 = -4$
$m = \{(-10, 12), (6, -4)\}$

5- متوازي سطوح مستطيل ابعاده تتغير بحيث تبقى قاعدته مربعة الشكل . يزداد طول ضلع القاعدة بمعدل 0.3cm/s وارتفاعه يتناقص بمعدل 0.5cm/s جد معدل تغير الحجم عندما يكون طول ضلع القاعدة يساوي 4cm والارتفاع 3cm

حجم متوازي المستطيلات = مساحه قاعدة x الارتفاع

$$x = 4, \frac{dx}{dt} = 0.3 \quad y = 3, \frac{dy}{dt} = -0.5$$

$v = x^2 . y$ نشتقها

$$\frac{dv}{dt} = x^2 \frac{dy}{dt} + y\, 2x \frac{dx}{dt}$$

$$= (4)^2(-0.5) + (3)(8)(0.3)$$

$$= 16(-0.5) + 24(0.3)$$

$$= -8.0 + 7.2 = -0.8\ cm^3/s$$





مبرهنه رول

شوكت نكول الدالة تحقق مبرهنه رول اذ تحقق ذني الشروط

1. **اذ جانت الدالة مستمرة على الفترة الي منطيها بالسؤال** [a.b]
2. **اذ جانت الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة الي بالسؤال** $(a.b)$
3. **نعوض قيمة الفترة ولازم يطبع عندك** F(b)=F(a)

معنا مرة نعوض قيمة الـــــ b بالمعادلة الاصــلية ومرة نعوض قيمة a لازم الناتج مالتهم يكون متساوي اذا ممتساوي معنا لا تحقق مبرهنة رول

4. **ومن تتحقق من الشروط راح تلكي قيمة وحدة على الاقل نسميها c تنتمي للفترة** (a.b)

شلون نطلع هل قيمة c

اشتق ← اخلي c بدل x ← اخلي الداله = صفر ← احل المعادله وطلع قيمه c

شوكت تهمل قيمه c اذا جانت ماتنتمي للفتره المعطاه او من ضمن حدود الفتره

ملاحظة / كل دالة كثيرة حدود يعني ماتلكي متغير بالمقام ولاتحت الجذر هاي دالة مستمرة وقابلة للاشتقاق دائما لان مجالها R والدالة الثابتة الي بس رقم هم تعتبر كثيرةحدود يعني هم مستمرة وقابلة للاشتقاق

مثال :- بين هل ان الدالة تحقق مبرهنة رول ثم جد قيمة c الممكنة

$$1)\ f(x) = (2-x)^2 \qquad x \in [0,4]$$

الحل /

1- f مستمرة على $[0,4]$ (لانها دالة كثيرة حدود)

2- f قابلة للاشتقاق (0,4) (لانها دالة كثيرة حدود)

-3

نعوض الa $\quad f(0) = (2-0)^2 = (2)^2 = 4$

نعوض الb $\quad f(4) = (2-4)^2 = (-2)^2 = 4$

الدالة تحقق شروط مبرهنة رول (تحقق عندي الشروط)

نشتق الدالة $\quad f^{-}(x) = 2(2-x)(-1) = -2(2-x)$

نبدل مكان كل x ب c واساويها بالصفر

$f^{-}(c) = -2(2-c) \to f^{-}(c) = 0$

$-2(2-c) = 0 \to 2-c = 0 \to c = 2 \in (0,4)$

$2)\ f(x) = 9x + 3x^2 - x^3 \qquad x \in [-1,1]$

الحل /

1- fمستمرة على $[-1,1]$ (لانها دالة كثيرة حدود)

2- f قابلة للاشتقاق $(-1,1)$ (لانها دالة كثيرة حدود)

3-

$f(-1) = 9(-1) + 3(-1)^2 - (-1)^3 = -9 + 3 + 1 = -5$

$f(1) = 9(1) + 3(1)^2 - (1)^3 = 9 + 3 - 1 = 11$

$;.f(a) \neq f(b)$

الدالة لا تحقق شروط مبرهنة رول (لان الشرط الثالث غير متحقق)

$3)\ f(x) = k \qquad x \in [a,b]$

1- الدالة مستمرة على الفترة [a,b] (لانها دالة ثابتة والدوال الثابتة تعتبر كثيرة حدود)

2-الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة (a,b)

3- f(a)=f(b)

اي ان c ممكن أن تكون اي قيمة ضمن الفترة (a,b) لأن f'(c)=0 دائما

واجب:-بين هل ان الدالة $f(x) = x^3 - ax$ تحقق مبرهنه رول على الفتره [-3,3] ثم جد قيمه c؟

ملاحظة / الدوال المثلثية sinax ’cosax دوال مستمرة وقابلة للاشتقاق دائما لان مجالها R

$1) f(x) = cos2x + 2cosx \qquad [0,2\pi]$

1- f مستمرة على الفترة $[0,2\pi]$ (لان مجالها R)

2- f قابلة للاشتقاق $(0,2\pi)$ (لان مجالها R)



$f(0) = cos2(0) + 2\cos(0) = 1 + 2(1) = 1 + 2 = 3$

$f(2\pi) = cos2(2\pi) + 2\cos(2\pi) \rightarrow = cos4\pi + 2cos2\pi$

$= cos0 + 2(1) \rightarrow = 1 + 2 = 3$

$f(0) = f(2\pi)$ الدالة تحقق مبرهنة رول

$f^{-} = (x) = -sin2x(2) + 2(-sinx) \rightarrow = -2sin2x - 2\sin x$

$f^{-} = (c) = -2sin2c - 2\sin c \qquad , f^{-}(c) = 0$

$= -2sin2c - 2\sin c = 0$

$-2(2\text{sinc cosc}) - 2\text{sinc} = 0$

$-4\text{sinc cosc} - 2\sin c = 0$

$-2\text{sinc}(2\text{cosc} + 1) = 0$

اما $- 2\text{sinc} = 0 \rightarrow \text{sinc} = 0$

$;.\, c = 0 \notin (0, 2\pi), c = \pi \in (0, 2\pi) \quad , c = 2\pi \notin (0, 2\pi)$

او$(2\text{cosc} + 1) = 0$

$2\text{cosc} = -1 \rightarrow \text{cosc} = -\frac{1}{2}$

$c = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{(3\pi - \pi)}{3} = \frac{2\pi}{3} \in (0, 2\pi)$

$c = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi + \pi}{3} = \frac{4\pi}{3} \in (0, 2\pi)$

ملاحظة/ الدوال الشطرية المزدوجة لازم احنة نثبتها مستمرة او قابلة للاشتقاق

-1 نستخرج الحد الفاصل الي هو الرقم المكرر بالفترتين الي منطيهم ونعوضهم بالدالة اليمين واليسار اذا طلعن مساويات نكول الدالة مستمرة واذا ممساويات الدالة غير مستمرة

-2 نشتق الدالتين وهم انعوض الحد الفاصل اذا طلعن مساويات نكول قابلة للاشتقاق واذا ممساويات غير قابلة للاشتقاق

اذا تحقق الشرطين نكول عليها مستمرة وقابلة للاشتقاق

-3 اذ جان الحد الفاصل لا يقع داخل فترة السؤال بحيث فترة السؤال تقع في احد فرعي الدالة فيتم التعامل مع هذا الفرع فقط

مثال: ابحث تحقق مبرهنة رول وان تحقق جد قيمة c

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \forall\, x \in [-1, 2] \\ -1 & \forall\, x \in [-4, -1) \end{cases} \quad x \in [-4, 2]$$

نتحقق من استمراريه الداله على الفتره [-4,2] نتحقق منها فقط عند النقطه التي تغير سلوك الداله اي ان عند x=-1

1- $F(-1) = (-1)^2 + 1 = 1 + 1 = 2$

2- $\lim_{X \to (-1)} F(X)$

L1 $\lim_{X \to (-1)} = X^2 + 1 = (-1)^2 + 1 = 1 + 1 = 2$ غاية اليسار

L2 $\lim_{X \to (-1)} . -1 = -1$ غاية اليمين

L1$\neq L2 \to \lim_{X \to (-1)} F(X)$ (غير موجودة)

الدالة ليست مستمرة على الفترة (-4,2)

الدالة لا تحقق مبرهنة رول على الفترة المعطاة

ملاحظه:-اذا جانت الداله ماتحقق شروط مبرهنه رول فماكو قيمة c



ملاحظة/ الدالة المطلقة نحولها نسويها دالة شطرية مرة الدالة سالبة ومرة موجبة ونشتغل نفس الدالة الشطرية

واجب:- ابحث تحقق مبرهنة رول على الدالة $x \in [-3,3]$ f(x)=|x| وان تحقق جد قيمة c الممكنة

ملاحظة / الدوال النسبية (الكسرية) تتكون من بسط ومقام) تكون مجالها R بس تستثني الرقم الي يجعل المقام صفر واذ جانت مستمرة تكون قابلة للاشتقاق دائما

مثال ابحث تحقق شروط مبرهنة رول على الدالة $f(x) = \frac{x^2-1}{x-2}$ وان تحقق جد قيمه cالممكنة

1- مجال الدالة هو R/(2) الدالة مستمرة على الفترة [-1,1] لان الفترة تقع ضمن مجالها

2- الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة (-1,1) لان الفترة تقع ضمن مجالها

3- نعوض قيمة ال a وقيمة ال b

$f(1) = \frac{1-1}{1-2} = 0 \quad , f(-1) = \frac{1-1}{-1-2} = 0$

$f(1) = f(-1)$ يعني $f(a) = f(b)$

$f'(x) = \frac{(x-2)(2x)-(x^2-1)(1)}{(x-2)^2} = \frac{2x^2-4x-x^2+1}{(x-2)^2}$

$= \frac{x^2-4x+1}{(x-2)^2}$

$f'(c) = \frac{c^2-4c+1}{(c-2)^2} \rightarrow f'(c) = 0$

$c^2-4c+1 = 0 \rightarrow c^2-4c+4 = -1+4$

$(c-2)^2 = 3 \rightarrow c-2 = \mp\sqrt{3}$

$c = 2+\sqrt{3} \notin (-1,1)$ يهمل $or\ c = 2-\sqrt{3} \in (-1,1)$

مبرهنة القيمة المتوسطة

اذا تحقق الشروط ادناه نقول ان الدالة تحقق شروط مبرهنة رول

1- اذا كانت الدالة مستمرة على الفترة المعطى[a,b]

2- اذا كانت الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المعطى (a,b)

3- يوجد على الاقل قيمة وحدة نسميها نرمزلها c تنتمي للفترة المعطى

شلون نطلع قيمه c

a) نشتق الدالة ونبدل مكان كل x ب c يعني تصير f'(c) (تمثل ميل المماس)

b) نساوي ميل المماس بميل الوتر (ميل الوتر هو $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$)

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

ملاحظة:- مبرهنة رول تعتبر جزء او حالة خاصة من مبرهنة القيمة المتوسطة

مثال / هل الدالة تحقق شروط مبرهنة القيمة المتوسطة

$$f(x) = x^2 - 6x + 4 \quad x \in [-1,7]$$

الحل / 1- الدالة مستمرة على الفترة [-1,7] لانها دالة كثيرة حدود

2- الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة (-1,7) لانها دالة كثيرة حدود

$f^{-}(x) = 2x - 6 \rightarrow f^{-}(c) = 2c - 6$ ميل المماس

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(7)-f(-1)}{7-(-1)}$$

$$= \frac{[(7^2) - 6.7 + 4] - [(-1)^2 - 6(-1) + 4]}{7+1}$$

$$= \frac{(49 - 42 + 4) - (1 + 6 + 4)}{8} = \frac{11 - 11}{8} = \frac{0}{8} = 0$$ (ميل الوتر)

ميل المماس = ميل الوتر



$$2c-6=0 \rightarrow 2c=6 \rightarrow c=3 \in (-1,7)$$

ملاحظة:- الدالة الجذرية الي دليلها زوجي علمود نثبت استمراريتها

1- نطلع مجال الدالة ؟ شلون نطلع المجال شوف ناخذ ما تحت الجذر اكبر او يساوي صفر نطلع قيم x الي هي قيم المجال

2- a اذا جانت الفترة الي بالسؤال تنتمي (يعني بداخلها) للمجال نكون الدالة مستمرة

b- اذا جانت الفترة الي بالسؤال ما تنتمي نكون الدالة غير مستمرة

3- a- الاشتقاق اذا جانت الفترة الي بالسؤال تنتمي للمجال نكون قابلة للاشتقاق

b- الاشتقاق اذا جانت الفترة الي بالسؤال ماتنتمي للمجال نكون غير قابلة للاشتقاق

مثال / هل ان الدالة تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة

$f(x)=\sqrt{25-x^2} \quad , \quad x \in [-4,0]$

$$25-x^2 \geq 0 \rightarrow (5-x)(5+x) \geq 0 \rightarrow x \in [-5,5]$$ مجال الدالة

.: الدالة مستمرة على الفترة (-4,0)

$$\lim_{x\to4^+} \sqrt{25-x^2} = \sqrt{25-(-4)^2} = \sqrt{25-16} = \sqrt{9} = 3 = (-4)$$

$$\lim_{x\to0^-} \sqrt{25-0^2} = \sqrt{25-0} = \sqrt{25} = 5 = f(0)$$

.: f مستمرة على الفترة (-4,0)

قابلية الاشتقاق

$$f^- = -\frac{2x}{2\sqrt{25-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{25-x^2}}$$

f.: قابله للاشتقاق على (-4,0) لانها محتواه كليا في مجال المشتقة

$f^-(c) = -\frac{c}{\sqrt{25-x^2}}$ ميل المماس

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(0)-f(-4)}{0-(-4)} = \frac{5-3}{0+4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$ (ميل الوتر)

ميل الوتر = ميل المماس

$$-\frac{c}{\sqrt{25-c^2}}=\frac{1}{2}\rightarrow -2c=\sqrt{25-c^2}\rightarrow 4c^2=25-c^2\rightarrow 5c^2=25$$

$$c^2=5\rightarrow c=\mp\sqrt{5}\rightarrow c=-\sqrt{5}\in(-4,0) or\ c=\sqrt{5}\in(-4,0)$$

ثوابت مبرهنة رول والقيمة المتوسطه

الثوابت مال مبرهنة رول تكون اما داخل الفترة اومن ضمن الدالة زين شلون نحل

1- لازم يكلك بالسؤال ان الدالة تحقق مبرهنة رول

2- نبدي من ثالث نقطة من الشروط ليش (لان كلي تحقق الشروط) يعني نبدي بهل خطوة f(b)=f(a) وذكرنة سابقا شنو معناها F(b)=F(a)

3- من الممكن ان يطلب قيمة الثوابت وقيمة c فاذا طلب قيمة c نعوض الثوابت الي طلعناها ونرجع نفس الشروط مال المبرهنة (ركز☹)

4- اذا ذكر قيمة c معنا لازم نشتق الدالة ونعوض مكان كل x ب c ونساويها بالصفر علمود نطلع قيمة احد الثوابت

مثال :- اذا كانت الدالة $f(x)=8-wx+x^2$ تحقق مبرهنة رول على الفترة [h,4] فاذا كانت قيمة c=3 جد قيمة h,w

الحل :- كلي تحقق الشروط معنا نبدي f(b)=f(a)

$$8-wh+h^2=8-4w+(4)^2$$
$$8-wh+h^2=8-4w+16$$
$$-wh+h^2=8-4w+16-8$$
$$-wh+h^2=-4w+16$$ نتوقف لان مجهولين

ذكرلي قيمة c
(راجع نقطة 4)

$$f'(x)=-w+2x\rightarrow f'(c)=-w+2c\rightarrow\ f'(c)=0$$

$-w+2c=0$ نعوض قيمة c $\rightarrow -w+2(3)=0\rightarrow -w=-6$

$w=6$ نعوضها وين توقفنة علمود نطلع قيمة h

$$-wh+h^2=-4w+16$$
$$-6h+h^2=-4(6)+16\rightarrow -6h+h^2=-24+16$$
$$-6h+h^2=-8\rightarrow h^2-6h+8=0\quad (h-4)(h-2)=0$$
$$\rightarrow h=2$$



ثوابت مبرهنه القيمه المتوسطه

1)لازم يكلك بالسوال ان الداله تحقق مبرهنه القيمه المتوسطه

2)نبدي من الشرط الثالث الي هو ميل المماس = ميل الوتر

3)نعوض عن قيمة c اذا موجوده لايجاد المجهول

مثال :-اذا كانت $f(x) = x^3 - 4x^2$ $F: [0, b] \to R$ وكانت F تحقق مبرهنه القيمه المتوسطه عند $c = \frac{2}{3}$ فاوجد قيمة $b \in R$

ميل المماس $f'(x) = 3x^2 - 8x \to f'(c) = 3c^2 - 8c$

$$m = \frac{f(b) - f(0)}{b - 0} = \frac{b^3 - 4b^2 - 0}{b} = \frac{b(b^2 - 4b)}{b} = b^2 - 4b$$

ميل المماس = ميل الوتر

$$3c^2 - 8c = b^2 - 4b$$

$$3\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 8\left(\frac{2}{3}\right) = b^2 - 4b \to \frac{4}{3} - \frac{16}{3} = b^2 - 4b$$

$$b^2 - 4b = -\frac{12}{3} \to b^2 - 4b + 4 = 0 \to (b-2)^2 = 0 \to b = 2$$

واجبات

1)اذا علمت ان الداله $f(x) = x^3 - hx^2$ تحقق مبرهنه رول ضمن الفتره [-1,2] فاوجد قيمه h ثم اوجد قيمة c الممكنه ؟

2)اذا كانت الداله $f(x) = 3x^2 - 2x^3 - 3$ تحقق شروط مبرهنه رول على الفتره [0,b] اوجد قيمة b ثم اوجد قيمة c الممكنه ؟

3)اذا كانت الداله $f(x) = 5 + ax - 3x^2$ تحقق مبرهنه رول على الفتره [-1,b] حيث c=1/3 والتي تنتمي للفتره نفسها فجد قيمة a,b ؟

4) اذا كانت $f(x) = x^2 - 2x$ $F: [-1, b] \to R,$ وكانت F تحقق مبرهنه القيمه المتوسطه عند c=2 فاوجد قيمه b ؟

التقريب

-1 نفرض دالة احنة على ان تكون مشابه لصيغة السؤال

مثلا الدالة الي يريد يقربها هي $f(x) = \sqrt{26}$ الدالة الي نفرضها $f(x) = \sqrt{x}$

-2 نستخرج قيمة (b) الي هي نفس الرقم الي بالسؤال

-3 نستخرج قيمة (a) الي هي اقرب رقم اله جذر سواء جان تربيعي او تكعيبي

-4 نستخرج قيمة h حسب القانون h=b-a

-5 نعوض قيمة a بالدالة الاصلية

-6 نشتق الدالة ونرجع نعوض قيمة a بالمشتقة

-7 نستخدم القانون

$$f(a+h) \simeq f(a) + h\,f'(a)$$

امثله حول التقريب مع تمارين التقريب الموجودة في الكتاب

مثال // جد $\sqrt{26}$ بصورة تقريبية.

$f(x) = \sqrt{x}$

$a = 25 \quad , b = 26 \quad , \quad h = b - a = 26 - 25 = 1$

$f(25) = \sqrt{25} = 5$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = f'(25) = \frac{1}{2\sqrt{25}} = \frac{1}{(2)(5)} = \frac{1}{10} = 0.1$

$f(26) \cong 5 + (1)(0.1) \cong 5.1$



مثال // جد بصورة تقريبية $(1.04)^3 + 3(1.04)^4$

$f(x) = x^3 + 3x^4$

$b = 1.04 \quad , a = 1 \quad , h = b - a = 1.04 - 1 = 0.04$

$f(1) = (1)^3 + 3(1)^4 = 1 + 3 = 4$

$f'(x) = 3x^2 + 12x^3 \rightarrow f(1) = 3(1)^2 + 12(1)^3 = 3 + 12 = 15$

$f(1.04) \cong 4 + (0.04)(15) \cong 4.6$

مثال // جد $\sqrt[3]{7.8}$ بصورة تقريبية

$f(x) = \sqrt[3]{x}$

$a = 8 \quad , b = 7.8 \quad , h = b - a = 7.8 - 8 = -0.2$

$f(8) = \sqrt[3]{8} = 2$

$f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$

$f'(x) = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}$

$f'(8) = \frac{1}{3}(8)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3(8)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(8)^2}} = \frac{1}{3(2)^2} = \frac{1}{3.4} = \frac{1}{12} = 0.08$

$f(7.8) \cong 2 + (-0.2)(0.08) \cong 1.984$

ملاحظه :-اذا جان عدنة سالب تحت جذر (دليله فردي مثلا 3-5-7-9) نطلع السالب خارج الجذر ونحل حل اعتيادي



$f(x) = -\sqrt[3]{x}$

$\sqrt[3]{-9} = -\sqrt[3]{9}$

$b = 9 \quad , a = 8 \quad h = b - a = 9 - 8 = 1$

$f(8) = -\sqrt[3]{8} = -2$

$f(x) = -\sqrt[3]{x} = -x^{\frac{1}{2}} \rightarrow f'(x) = -\frac{1}{3} x^{\frac{-2}{3}} = f'(8) = -\frac{1}{3}(8)^{\frac{-2}{3}}$

$$= \frac{-1}{3(8)^{\frac{2}{3}}} = \frac{-1}{3\sqrt[3]{8^2}} = \frac{-1}{3(2)^2} = -\frac{1}{3.4} = -\frac{1}{12} = -0.08$$

$$f(-9) \cong -2 + (1)(-0.08) \cong = -2.08$$

ملاحظة/ منكدر نطلع قيمة للجذور العشرية المحصورة بين صفر وواحد الا اذ جان عدد المراتب الي ورة الصــفر باليمين متســاوية وية دليل الجذر واذ ممتســاوية احط صــفر علمود نساويها

مثال // جد تقريب للعدد $\sqrt[3]{0.12}$

حطينه صفر علمود نساوي دليل الجذر وية عدد المراتب الي ورهo

$$\sqrt[3]{0.12} = \sqrt[3]{0.120}$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

a = 0.125 , b = 0.120 , h = b - a = 0.120- 0.125= - 0.005

$$f(0.125) = \sqrt[3]{0.125} = 0.5$$

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}} \to f'(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}$$

$$f'(0.125) = \frac{1}{3}(0.125)^{\left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{1}{3\sqrt[3]{0.125}} = \frac{1}{3(0.5)^2} = \frac{1}{3(0.25)}$$

$$\frac{1}{0.75} = 1.3$$

$$f(0.120) \cong 0.5 + (-0.005)(1.3) \cong 0.4935$$





مثال //جد بصورة تقريبية قيمة للعدد $\sqrt{\frac{1}{2}}$ (مهم جد)

او مثال:-اوجد بصوره تقريبيه للعدد $\sqrt{0.5}$ (وزاري)

$\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{0.5} = \sqrt{0.50}$ راجع الملاحظة اعلاه

$f(x) = \sqrt{x}$

$b = 0.50 \quad , a = 0.49 \quad h = 0.50 - 0.49 = 0.01$

$f(0.49) = \sqrt{0.49} = 0.7$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \to f'(0.49) = \frac{1}{2\sqrt{0.49}} = \frac{1}{2(0.7)} = \frac{1}{1.4} = 0.7$

$h.f'(0.49) = 0.007$

$f(0.5) \cong 0.7 + (0.01)(0.7) = 0.707$



$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

$b = 9 \quad , a = 8 \quad h = b - a = 9 - 8 = 1$

$f(8) = \frac{1}{\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{2} = 0.5$

$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = x^{\frac{-1}{3}}$

$f'(x) = \frac{-1}{3} x^{\frac{-4}{3}} \to f'(8) = \frac{-1}{3}(8)^{\frac{-4}{3}} = \frac{-1}{3\sqrt[3]{8^4}} = \frac{-1}{3.2^4} = \frac{-1}{3(16)}$

$\frac{-1}{48} = -0.0208$

$f(9) \cong 0.5 + (1).(-0.0208) \cong 0.4792$



$$f(x)=\frac{1}{x}$$

$$b=101 \quad ,a=100 \quad ,h=b-a=101-100=1$$

$$f(100)=\frac{1}{100}=0.01$$

$$f'(x)=\frac{1}{x}=x^{-1}\rightarrow f'(x)=-x^{-2}=-\frac{1}{x^2}$$

$$f'(100)=-\frac{1}{100^2}=\frac{-1}{10000}=-0.0001$$

$$f(101)\cong 0.01+1.-0.0001\cong 0.0099$$

مثال// أذا كانت $f(x)=\sqrt[5]{31x+1}$ فجد بصورة تقريبية F(1.001)

ملاحظة:- مثل هاي الاسئله هو منطيني الدالة فميحتاج نفرض دالة زين والقيمة الي منطيها (هاي تمثل قيمة b) ركز

$$f(x)=\sqrt[5]{31x+1}$$

$$b=1.001 \quad a=1 \quad ,h=b-a=1.001-1=0.001$$

$$f(1)=\sqrt[5]{31(1)+1}=\sqrt[5]{32}=2$$

$$f(x)=(31x+1)^{\frac{1}{5}}\rightarrow f'(x)=\frac{1}{5}(31x+1)^{\frac{-4}{5}}(31)$$

$$f'(1)=\frac{1}{5}(31(1)+1)^{\frac{(-4)}{5}}(31)=\frac{31}{5(32)^{\frac{4}{5}}}=\frac{31}{5\sqrt[5]{32^4}}=\frac{31}{5(2)^4}$$

$$\frac{31}{5(16)}=\frac{31}{80}=0.3$$

$$f(1.001)\cong 2+(0.001)(0.3)\cong 2.0003$$



مثال// جد بصورة تقريبية $\sqrt[5]{(0.98)^3} + (0.98)^4 + 3$

$$f(x) = \sqrt[5]{(x)^3} + (x)^4 + 3$$

$$b = 0.98 \quad . \quad a = 1 \qquad h = b - a = 0.98 - 1 = -0.02$$

$$f(1) = \sqrt[5]{(1)^3} + (1)^4 + 3 = \sqrt[5]{1} + 1 + 3 = 1 + 1 + 3 = 5$$

$$f(x) = x^{\frac{3}{5}} + x^4 + 3 \rightarrow f'(x) = \frac{3}{5}x^{\left(\frac{-2}{5}\right)} + 4x^3$$

$$f'(1) = \frac{3}{5}(1)^{-\frac{2}{5}} + 4(1)^3 = \frac{3}{5} + 4 = \frac{3+20}{5} = \frac{23}{5} = 4.6$$

$$f(0.98) \cong 5 + (-0.02)(4.6) \cong 4.908$$



مثال // جد بصورة تقريبية $\sqrt{26} + \sqrt[3]{26}$

مثل هاي الاسئلة ناخذ كل جزء وحد وبعدين نجمع الناتج (ليش ناخذ كل جزء وحد لان ماكو رقم اله جذر تربيعي وتكعيبي نفس الوقت)

ناخذ $\sqrt{26}$

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$b = 26 \quad , a = 25 \rightarrow h = 26 - 25 = 1$$

$$f(25) = \sqrt{25} = 5$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \rightarrow f'(25) = \frac{1}{2\sqrt{25}} = \frac{1}{2(5)} = \frac{1}{10} = 0.1$$

$$f'(26) \cong 5 + (1)(0.1) \cong 5.1$$

ناخذ $\sqrt[3]{26}$

$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

$$b = 26 \ . a = 27 \rightarrow h = b - a = 26 - 27 = -1$$

$$f(27) = \sqrt[3]{27} = 3$$

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}$$

$$f'(27) = \frac{1}{3}(27)^{\frac{-2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{27^2}} = \frac{1}{3(3)^2} = \frac{1}{3,9} = \frac{1}{27} = 0.037$$

$$f'(26) \cong 3 + (-1)(0.037) \cong 2.963 \quad , \quad \therefore f(26) \cong 5.1 + 2.963 \cong 8.063$$

مثال/ جد بصورة تقريبية $\sqrt{17} + \sqrt[4]{17}$

هنا نحلهم سوه ميحتاج نحلهم كل جزء وحد لان (دليل الجذر تربيعي ومضاعفاته مع ذلك اكو رقم اله جذر تربيعي وجذر رابع بنفس الوقت)

$$f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{4}}$$

$$b = 17 \quad a = 16 \quad \to h = 17 - 16 = 1$$

$$f(16) = \sqrt{16} + \sqrt[4]{16} = 4 + 2 = 6$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{\left(\frac{-1}{2}\right)} + \frac{1}{4}x^{\frac{-3}{4}} \to f'(16) = \frac{1}{2}(16)^{\frac{-1}{2}} + \frac{1}{4}(1)^{\frac{-3}{4}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{16}} + \frac{1}{4\sqrt[4]{16^3}} = \frac{1}{2.4} + \frac{1}{4(2)^3} = \frac{1}{8} + \frac{1}{32} = \frac{4+1}{32} = \frac{5}{32} = 0.15$$

$$f(17) \cong 6 + (1)(0.15) \cong 6.15$$



راجع الملاحظة (ص 40)

$\sqrt{63}$ الجزء الاول

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$b = 63 \quad a = 64 \quad h = 63 - 64 = -1$$

$$f(64) = 8$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \to f'(64) = \frac{1}{2\sqrt{64}} = \frac{1}{2.8} = \frac{1}{16} = 0.06$$

$$f(63) = 8 + (-1)(0.06) = 7.94$$

$\sqrt[3]{63}$ الجزء الثاني



$f(x)=\sqrt[3]{x}$

$b=63 \quad a=64 \quad h=63-64=-1$

$f(64)=\sqrt[3]{64}=4$

$f(x)=\sqrt[3]{x} \to f'(x)=\frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}$

$f'(64)=\frac{1}{3}(64)^{\frac{-2}{3}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{64^2}}=\frac{1}{3.4^2}=\frac{1}{3(16)}=\frac{1}{48}=0.02$

$f(63)\cong 4+(-1)(0.02)\cong 3.98$

$f(63)\cong 7.94+3.98\cong 11.92$

التقريب للاشكال الهندسية

ملاحظة/ اذ نريد انطلع القيمة التقريبية للحجوم او المســاحات للاشــكال الهندســية نقوم بكتابة القانون الي يخصها أذا انطة الطرف الايمن من القانون فهاي الخطوة الاولى اما اذا انطه الطرف الايسر من القانون فهنا لازم تبسط قبل لا تحل

((الاختلاف بين التقريب للدالة العادية والاشكال الهندسية : هناك اما تفرض دالة او ينطيها الك اما هنا لا الدالة هي قانون الشكل الهندسي الي يطلبه مثلا طلب منك جد حجم بصورة تقريبية معناه الدالة الي تشتغل عليها قانون الحجم))) ركز

مثال / مكعب طول حرفه 9.98 cm جد حجمه بصـــوره تقريبية باســـتخدام مبرهنة القيمة المتوسطة

انطاني طول ضلعه (حرفه) معناه الطرف الايمن معناه نبدي بالحل بشكل مباشر

$f(x)=x^3$

$b=9.98 \quad a=10 \quad h=b-a=9.98-10=-0.02$

$f(10)=10^3=1000$

$f'(x)=3x^2 \to f'(10)=3(10)^2=3(100)=300$

$f(9.98)\cong 1000+(-0.02)(300)\cong 994$

مثال / متوازي سطوح مستطيلة قاعدته مربعة وارتفاعه ثلاث امثال طول القاعدة اوجد الحجم بصورة تقريبية عندما يكون طول قاعدته 2.97cm

هنا انطاني الطرف الايمن بس بيه متغيرين فلازم ينطي علاقه ثانيه علمود نقلل عدد المتغيرات

$$v = x^2 . y \dots\dots\dots 1$$

$$y = 3x \dots\dots\dots 2$$

$$v = x^2(3x) = 3x^3 \to f(x) = 3x^3$$

$$f(3) = 3(3)^3 = 3(27) = 81$$

$$f'(x) = 9x^2 \to f'(3) = 9(3)^2 = 9 \times 09 = 81$$

$$f(2.97) \cong 81 + (-0.03)(81) \cong 78.57$$

مثال / مخروط دائري قائم ارتفاعه يســاوي طول قطر قاعدته فاذا كان ارتفاعه (2.98) فجد حجمه بصورة تقريبية

$$v = \frac{1}{3}\pi r^2 h \dots\dots\dots 1$$

$$h = 2r \to 2r = h \to r = \frac{h}{2} \dots\dots\dots 2 \ \ in\ 1$$

$$v = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2 . h = \frac{\pi}{3} . \frac{h^2}{4} . h = \frac{\pi}{12} . h^3$$

$$f(x) = \frac{\pi}{12}x^3 \to b = 2.98 \quad a = 3 \quad h = -0.02$$

$$f(3) = \frac{\pi}{12}(3)^3 = \frac{\pi}{12}27 = \frac{9\pi}{4} = 2.25\pi$$

$$f'(3) = \frac{\pi}{12}(3x^2) = \frac{\pi}{4}x^2 \to f'(3) = \frac{\pi}{4}3^2 = \frac{9\pi}{4} = 2.25\pi$$

$$f(2.98) \cong 2.25 + (-0.02)(2.25\pi) \cong 2.205\pi$$



مثال / كره حجمها $84\pi cm^3$ جد نصف قطرها بصورة تقريبية باستخدام القيمة المتوسطة

هنا انطاني الطرف الايسر فلازم نبسط ونطلع العلاقة الي يريد الها قيمة تقريبية

$$v = \frac{4}{3}\pi r^3 \to \cancel{84\pi} = \frac{\cancel{4}}{3}\cancel{\pi} r^3 \to 21 = \frac{r^3}{3} \to r^3 = 63 \to r = \sqrt[3]{63}$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x} \to \quad b = 63 \quad a = 64 \quad h = -1$$

$$f(64) = \sqrt[3]{64} = 4$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}} \to f'(64) = \frac{1}{3}(64)^{\frac{-2}{3}} = 0.02$$

$$f(63) \cong 4 + (-1)(0.02) \cong 3.98$$

مثال / مخروط دائري قائم حجمه $210\pi cm^3$ جد القيمة التقريبية لنصف قطر قاعدته اذ كان ارتفاعه 10cm

الحل

$$v = \frac{1}{3}\pi r^2 h \to \cancel{210\pi} = \frac{1}{3}\cancel{\pi} r^2 10 \to \cancel{21} = \frac{r^2}{3} \to r^2 = 63 \to r = \sqrt{63}$$

$$f(x) = \sqrt{x} \to f(64) = \sqrt{64} = 8$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \to f'(64) = \frac{1}{2\sqrt{64}} = \frac{1}{2.8} = \frac{1}{16} = 0.06$$

$$f(63) \cong 8 + (-1)(0.06) \cong 7.94$$

b=63

a=64

h=-1

مثال / $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ فاذا تغيرت x من 8 الى 8.06 فما مقدار التغير التقريبي للدالة

مثل هاي الاسئلة الرقم الصغير يمثل قيمة a والرقم الجبير يمثل قيمة b

ملاحظة:- كلمة مقدار التغير التقريبي معناه طبق $h.f'$ هذا فقط

الحل /

$$f(x)=\sqrt[3]{x^2}\rightarrow x^{\frac{2}{3}}\rightarrow f'(x)=\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\rightarrow f(8)=\frac{2}{3\sqrt[3]{8}}$$

$$=\frac{2}{2(3)}=\frac{1}{3}=0.033$$

a=8
b=8.06
h=0.06

$$h.f'(8)=(0.06)(0.33)=0.0198$$

ملاحظه / 1- اسماء مقدار التغير التقريبي في الاسئلة مثلا (حجم الطلاء بصورة تقريبية)

(حجم الجليد او الشمع بصورة تقريبية) (القيمة التقريبية للحجم او المساحة)

مثال:- فجد حجم الطلاء 0.15cm فاذا كان سمك الطلاء 10 cm يراد طلاء مكعب طول ضلعه بصورة تقريبية باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة

a = 10 , b = 10.3 , h = b - a = 10.3 - 10 = 0.3

$$v=l^3\rightarrow f(x)=x^3\rightarrow f'(x)=3x^2\rightarrow f'(10)=3(10)^2=3\times 100$$

$$=300$$

$$h.f'(10)=0.3(300)=90.0=90$$



مثال/ كرة نصف قطرها 6cm طليت بطلاء سمكه 0.1 cm جد كميه الطلاء بصورة تقريبية باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة

b=6.1 a=6 h=0.1

$$v=\frac{4}{3}\pi r^3 \to f(x)=\frac{4}{3}\pi x^3$$

$$f'(x)=\frac{4\pi}{3}.3x^2=4\pi x^2 \to f'(6)=4\pi(6)^2=4\pi(36)=144\pi$$

$$h.f'(6)=(0.1)(144\pi)=14.4\pi$$

تمارين (3-3) الخاصة بمبرهنة رول فقط

س1:-اوجد قيمه c التي تعينها مبرهنه رول في كل ممايأتي

$a)\ \ f(x)=x^3-9x \quad [-3,3]$

1- fمستمره على [-3,3] لانها كثيره حدود

2- f قابله للاشتقاق $(-3,3)$ لانها كثيره حدود

3-

$$f(3)=3^3-9.3=27-27=0$$

$$f(-3)=-3^3-9(-3)=-27+27=0$$

$f(-3)=f(3)$ الداله تحقق شروط مبرهنه رول على الفتره المعطا

$$f^-(x)=3x^2-9$$

$$f^-(c)=3c^2-9$$

$$3c^2-9=0 \div 3 \to c^2-3=0 \to c^2=3 \to c=\mp\sqrt{3}$$

$$c=-\sqrt{3}\in(-3,3)$$

$$c=\sqrt{3}\in(-3,3)$$

$b)\ \ f(x)=2x+\frac{2}{x} \quad \left[\frac{1}{2},2\right]$

1)الداله مستمره على الفتره المغلقه $\left[\frac{1}{2},2\right]$ لان $0\notin\left[\frac{1}{2},2\right]$ لانها كسريه

2)الداله قابله للاشتقاق على الفتره المفتوحه $(\frac{1}{2},2)$ لان $(\frac{1}{2},2) \notin 0$ لانها كسريه

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=2\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{2}{\frac{1}{2}}=1+4=5$$

$$f(2)=2(2)+\frac{2}{2}=4+1=5$$

$f(b)=f(a)$ الداله تحقق شروط مبرهنه رول

$$f(x)=2x+2x^{-1}\rightarrow f'(x)=2-2x^{-2}\rightarrow f'(x)=2-\frac{2}{x^2}$$

$$f'(c)=2-\frac{2}{c^2}\rightarrow 2-\frac{2}{c^2}=0\rightarrow c^2=1\rightarrow c=1\in\left(\frac{1}{2},2\right),c=-1\notin\left(\frac{1}{2},0\right)$$

س6/ بين ان كل من الدوال الاتية تحقق مبرهنة رول على الفترة المعطاة

$\boldsymbol{a)\ f(x)=(x-1)^4 \quad ,x\in(-1,3)}$

1- f مستمرة على $(-1,3)$

2- f قابلة للاشتقاق $(-1,3)$

3-

$$f(-1)=(-1-1)^4=-2^4=16$$

$$f(3)=(3-1)^4=2^4=16$$

.: الدالة تحقق شروط مبرهنة رول على الفترة (-1,3)

$$f^-(x)=4(x-1)^3.1=4(x-1)^3$$

$$f^-(c)=4(c-1)^3\rightarrow f^-(c)=0$$

$$4(c-1)^3=0\rightarrow c-1=0\rightarrow c=1\in(-1,3)$$



b) $h(x) = x^3 - x \quad , \quad x \in [-1, 1]$

الحل :- أ) الدالة مستمرة على الفترة $[-1, 1]$ لانها كثيرة حدود

ب) الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة $(-1, 1)$ لانها كثيرة حدود .

جـ) $h(1) = 1 - 1 = 0 \quad , h(-1) = -1 + 1 = 0 \quad \Rightarrow h(1) = h(-1)$

$h'(x) = 3x^2 - 1$

$h'(c) = 0 \quad \Rightarrow \quad 3c^2 - 1 = 0 \Rightarrow 3c^2 = 1 \quad \Rightarrow c^2 = \frac{1}{3}$

$c = \frac{1}{\sqrt{3}} \in (-1, 1) \quad \text{OR} \quad c = -\frac{1}{\sqrt{3}} \in (-1, 1)$

---

c) $g(x) = x^2 - 3x \quad , \quad x \in [-1, 4]$

الحل :- أ) الدالة مستمرة على الفترة $[-1, 4]$ لانها كثيرة حدود

ب) الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة $(-1, 4)$ لانها كثيرة حدود .

جـ) $g(-1) = 1 + 3 = 4 \quad , g(4) = 16 - 12 = 4 \quad \Rightarrow g(-1) = g(4)$

د) $g'(x) = 2x - 3$

$g'(c) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2c - 3 = 0 \Rightarrow 2c = 3 \quad \Rightarrow c = \frac{3}{2} \in (-1, 4)$

$d)\ f(x) = cos2x + 2cosx \qquad (0, 2\Pi)$

1- f مستمرة على الفترة $(0, 2\Pi)$

2- f قابلة للاشتقاق $(0, 2\Pi)$

-3

$f(0) = cos2(0) + 2\cos(0) = 1 + 2(1) = 1 + 2 = 3$

$f(2\pi) = cos2(2\pi) + 2\cos(2\pi) \rightarrow = cos4\pi + 2cos2\pi$

$= cos0 + 2(1) \rightarrow = 1 + 2 = 3$

$f(0) = f(2\pi)$ الداله تحقق مبرهنه القيمة المتوسطه

$f^{-}(x) = -sin2x(2) + 2(-sinx) \rightarrow = -2sin2x - 2\sin x$

$f^{-}(c) = -2sin2c - 2\sin c \qquad , f^{-}(c) = 0$

$= -2sin2c - 2\sin c = 0$

$-2(2sinc\ cosc) - 2sinc = 0$

-4sinc cosc-2sin c=0

$-2sinc(2cosc + 1) = 0$

if$-2sinc = 0 \rightarrow sinc = 0$

;.c=0$\notin (0, 2\Pi), c = \Pi \in (0, 2\pi)\ \ , c = 2\pi \notin (0, 2\pi)$

or(2cosc+1)=0

2cosc=-1 $\rightarrow cosc = -\frac{1}{2}$

تقع في الربع الثاني او الثالث c

If $c = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{(3\pi - \pi)}{3} = \frac{2\pi}{3} \in (0, 2\pi)$

Or $c = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi + \pi}{3} = \frac{4\pi}{3} \in (0, 2\pi)$

س7/ ابحث تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة على الفترة المعطاة وان تحقق جد قيمة c

a) $f(x) = x^3 - x - 1 \quad , x \in [-1, 2]$

الحل :- 1) الدالة مستمرة على الفترة [2 , 1-] لانها كثيرة حدود .

2) الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة (2 , 1-) لانها كثيرة حدود .

3) يوجد على الاقل قيمة واحدة $c \in (a, b)$ وتحقق $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

$f'(x) = 3x^2 - 1 \Rightarrow f'(c) = 3c^2 - 1$ ميل المماس

ميل الوتر $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(2) - f(-1)}{2 + 1} = \frac{(8 - 2 - 1) - (-1 + 1 - 1)}{3} = \frac{(5) - (-1)}{3} = 2$

ميل المماس = ميل الوتر

$3c^2 - 1 = 2 \Rightarrow 3c^2 = 3 \Rightarrow c = 1 \in (-1, 2)$ OR $c = -1 \notin (-1, 2)$



b) $h(x) = x^2 - 4x + 5$, $x \in [-1 , 5]$

الحل :- 1) الدالة مستمرة على الفترة [5, 1-] لانها كثيرة حدود .

2) الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة (5 , 1-) لانها كثيرة حدود .

3) يوجد على الاقل قيمة واحدة $c \in (a , b)$ وتحقق $h'(c) = \frac{h(b)-h(a)}{b-a}$

2014 دورة 4 اذار

ميل المماس $h'(x) = 2x - 4 \Rightarrow h'(c) = 2c - 4$

ميل الوتر $\frac{h(b)-h(a)}{b-a} = \frac{h(5)-h(-1)}{5+1} = \frac{(25-20+5)-(1+4+5)}{6} = \frac{(10)-(10)}{6} = 0$

ميل المماس = ميل الوتر

$2c - 4 = 0 \Rightarrow 2c = 4 \Rightarrow c = 2 \in (-1 , 5)$

c) $f(x) = \frac{4}{x-2}$ (-1,2)

الاستمرارية :

$$\forall a \in R \rightarrow f(a) = \frac{4}{a-2} \epsilon R$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \frac{4}{x-2} = \frac{4}{a-2}$$

.: الدالة مستمرة على الفترة $(-1,2)$ $\lim_{x\to a} f(x) = f(a) = \frac{4}{a+2}$

$X + 2 = 0 \rightarrow X = -2$

$-2 \notin (-1,2)$

.: الدالة مستمرة على $(-1,2)$

قابلية الاشتقاق:

$F^{-}(X) = \frac{(X+2).0 - 4(1)}{(X+2)^2}$

$-\frac{4}{(X+2)^2} = (X+2)^2 = 0 \rightarrow X = -2 \notin (-1,2)$

مجال المشتقة R/-2

.: الدالة قابلة للاشتقاق في الفترة $(-1,2)$ لان مجالها محتواة كليا مجال الدالة

.: الدالة f تحقق مبرهنة القيمه المتوسطة

$$F^{-}(C) = -\frac{4}{(C+2)^2} = \frac{(F(2)-F(-1))}{(2-(-1))} = \frac{\frac{4}{2-2} - \frac{4}{-1+2}}{2+1} = \frac{\frac{4}{4} - \frac{4}{1}}{3}$$

$$\frac{1-4}{3} = -\frac{3}{3} = -1$$ ميل الوتر

$$-\frac{4}{(C+2)^2} = 1 \rightarrow -(C+2)^2 = -4 \rightarrow (C-2)^2 = 4 \rightarrow C+2 = \mp 2$$

$C + 2 = 2 \rightarrow C = 0 \in (-1, 2)$

$C + 2 = -2 \rightarrow C = -4 \notin (-1, 2)$

$d)\ \ f(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2}$ (-2,7)

اختبار الاستمرارية (مجال الدالة R=):. f مستمرة على (-2,7)

1-$\forall a \in (-2, 7)$

$f(a) = \sqrt[3]{(x+1)^2} \in R$

$2 - \lim_{X\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \sqrt[3]{(x+1)^2} = \sqrt[3]{(a+1)^2}$

$3 - \lim_{X\to a} f(x) = f(a) = \sqrt[3]{(a+1)^2}$

:. الدالة f مستمرة على (-2,7)

قابلية الاشتقاق

اختبار قابلية الاشتقاق

$f(x) = (x+1)^{\frac{1}{3}}$

$f^{-}(x) = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{2}{3}}(1)$

$= \frac{2}{3}\sqrt[3]{x+1}$

$x + 1 = 0 \rightarrow x = -1 \in (-2, 7)$

الدالة قابلة للاشتقاق

$f^{-}(x) = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{2}{3}}(1)$



$= \frac{2}{3}\sqrt[3]{x+1}$

الدالة F ليست قابلة للاشتقاق في (2,7-)

:. الدالة f لا تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة

واجبات

س1:-وزاري:-مكعب حجمه $26cm^3$ اوجد باستخدام نتيجه مبرهنه القيمه المتوسطه طول ضلعه بصوره تقريبيه

س2:-وزاري:-اوجد باستخدام نتيجه مبرهنه القيمه المتوسطه $\sqrt[3]{0.124}$

س3:-وزاري:-اوجد باستخدام نتيجه مبرهنه القيمه المتوسطه $(1.03)^5 + 3(0.01)^{\frac{1}{2}} + 2$

س4:-وزاري:-جد باستخدام نتيجه مبرهنه القيمه المتوسطه طول ضلع مربع مساحته 101

س5:-وزاري:-اوجد باستخدام التقريب $\sqrt[4]{82}$

س6:-وزاري:-جد باستخدام نتيجه مبرهنه القيمه المتوسطه $(15.6)^{-\frac{1}{4}}$

س7:-جهاز كهربائي على شكل مكعب طول ضلعه (29m) مغلق بصندوق خشب سمكه (0.6cm) جد بصوره تقريبيه حجم الخشب باستخدام نتيجه مبرهنه القيمه المتوسطه

س8:-مربع مساحته 48 جد طول ضلعه بصوره تقريبيه ؟

س9:-اذا كان $f(x) = \sqrt[3]{3x+5}$ جد بصوره تقريبيه قيمة f(1.001)

س10:-اذا كان $f(x) = \sqrt{x^3+1}$ تغيرت X من 2 الى 2.015 احسب مقدار التغير للدالة f

النهايات (ايجاد مناطق التزايد والتناقص والنهايات العظمى والصغرى)

1- نشتق المشتقة الاولى ونساويه بالصفر نحل المعادلة علمود نطلع قيمة x

2- نعوض قيمة x بالمعادلة الاصلية علمود تطلع y راح تصير عندك نقطة (x,y) حرجة

3- نحط خط الاعداد ونحط عليه بس قيم x (ناخذ قيم اكبر واصغر من x نعوضهم بالمشتقة)

4- اذ طلعت القيمة موجبة يعني سهم للاعلى ومتزايدة / وأذا طلعت قيمة سالبة يعني سهم للاسفل ومتناقصة)

5- اذ نريد نعرف النقطة الحرجة نوعها أذا طلع عندك الرسم على شكل سبعة بالعربي فهاي صغرى محلية واذ طلعت ثمانية فهاي عظمى محلية اذا لاسبعة ولاثمانية فهي مجرد نقطة حرجه

6- الدوال النسبية الي من نشتقها تبقة دالة نسبية بسطها ثابت فماراح نكدر نساويه بالصفر فلا توجد نقاط حرجة من نرسم خط الاعداد نثبت عليه القيمة الي تخلي المقام صفر على شكل فجوة

خطة العمل للحل لستخراج النقطة ومعرفة نوعها :-

نشتق $\xrightarrow{\text{بعدها}}$ نساوي المشتقة بالصفر $\xrightarrow{\text{بعدها}}$ نطلع قيمة x $\xrightarrow{\text{بعدها}}$ نطلع y $\xrightarrow{\text{بعدها}}$ نحط خط الاعداد

خطة العمل تعتبر خطوات حل لكل سؤال



مثال :- جد مناطق التزايد والتناقص ونقاط النهاية العظمى والصغرى المحلية

1) نشتق الدالة $f(x) = 9x + 3x^2 - x^3$

نساوي المشتقة بالصفر $f'(x) = 9 + 6x - 3x^2$

نقسم المعادله على (-3) $[9 + 6x - 3x^2 = 0] \div (-3)$

نحلل بالتجربة $-3 - 2x + x^2 = 0 \rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$

$(x - 3)(x + 1) = 0$

اما $x - 3 = 0 \rightarrow x = 3$ نعوضها الدالة الاصلية

$f(3) = 9(3) + 3(3)^2 - (3)^3 = 27 \rightarrow y = 27$

نقطة حرجة $(3\ ,27)$

او $x + 1 = 0 \rightarrow x = -1$ نعوضها الداله الاصلية

$f(-1) = 9(-1) + 3(-1) - (-1)^3 = -5 \rightarrow y = -5$

نقطة حرجة $(-1, -5)$

نحط قيم x فقط على خط الاعداد وناخذ قيم اكبر من x واصغر منه علمود نعرف عظمى لو صغرى

x < -1 (-1 , 3) x > 3

اشارة f'(x) ------ (-1) ++++++ (3) ------

الدالة متناقصة بالفترتين { x : x ∈ R ; x >3} , { x : x ∈ R ; x < -1}

الدالة اقل من السالب 1

الدالة متزايدة بالفترة { x : x ∈ R ; x ∈ (-1 , 3)}

نقطة نهاية صغرى محلية (-1,-5) , نقطة نهاية عظمى محلية (3,27)

ليش (-1,-5)عظمى محلية لان سحبها من رقم ثمانية \ /

ليش (3,27)صغرى محلية لأن شكل الرسم طلع رقم سبعة V

2) نشتق الدالة $f(x) = x^2$

$f'(x) = 2x$ نساويها بالصفر $\rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0$ نعوضها بالدالة الاصلية

$f(0) = (0)^2 = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$ نقطة حرجة

نحط قيم x فقط على خط الاعداد وناخذ قيم اكبر من x واصغر منه علمود نعرف عظمى لو صغرى

x < 0 x > 0

اشارة f'(x) ------ (0) ++++++

متناقصة بالفترة $\{x; x \in R\ x$ ... $0\}$

صغرى محلية $(0, 0)$

ليش (0,0)صغرى محلية لان شكل الرسم طلع رقم سبعة V

3) $f(x) = 1 + (x - 2)^2$

sol : $f'(x) = 2(x - 2)(1) \Rightarrow 2(x - 2) = 0 \Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \,,\; f(2) = 1$

$\Rightarrow (2 , 1)$ نقطة حرجة

$x < 2$ $x > 2$

اشارة $f'(x)$ -------- (2) ++++++

الدالة متزايدة بالفترة $\{x : x \in R \,;\, x > 2\}$

الدالة متناقصة بالفترة $\{x: x \in R : x < 2\}$

محلية صغرى $(2, 1)$

ليش صغرى محلية لان شكل الرسم طلع رقم سبعة V

$4 - f(x) = 1 - (x - 2)^2$

$f^-(x) = 0 - 2(x - 2)(1) \rightarrow= -2(x - 2) f^-(x) = 0$

$x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$

$f(x) = 1 - (2 - 2)^2 = 1$

نقطة حرجة (1,2).:

$x < 2$ $x > 2$

اشارة $f'(x)$ ++++++ (2) -------

مناطق التزايد هي : $\{ x : x < 2 \}$ و مناطق التناقص هي : $\{ x : x > 2 \}$

نقطة نهاية عظمى محلية (2,1).:

$5 - f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$

$f'(x) = 3x^2 - 18x + 24 \quad , f'(x) = 0$

$(3x^2 - 18x + 24) \div 3$

$x^2 - 6x + 8 = 0 \rightarrow (x - 4)(x - 2) = 0$

$if\ x - 4 = 0 \rightarrow x = 4$

$or\ x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$

$iff(x) = (4)^3 - 9(4)^2 + 24(4) = 16 \quad (4, 16)$ نقطة حرجة



$or\ f(x) = (2)^3 - 9(2)^2 + 24(2) = 20 \quad (2,0)$ نقطة حرجة

x < 2 (2 , 4) x > 4

++++++ (2) - - - - - - (4) ++++++ f′(x)اشارة

التزايد: { x : x > 4 } ، { x : x < 2 }

منطقة متناقصة بالفترة (2,4)النقطة (2,20) عظمى محلية النقطة (4,16) صغرى محلية

$6) f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

$$f(x) = x^{\frac{2}{3}} \text{ نشتق} \rightarrow \quad f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}}$$

$\frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \neq 0$ حسب الخطوة ال6 اذا دالة كسرية بسطها ثابت منكدر نساويها بالصفر

------------------------0+++++++++++++++++

لا توجد نقطة حرجة



الدالة متناقصة في $\{x: x < 0\}$ الدالة متزايدة في $\{x: x > 0\}$

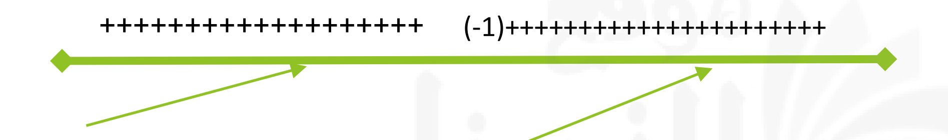
لا توجد نهايات عظمى او صغرى

$7)\ f(x) = \frac{x-1}{x+1}$

$$f'(x) = \frac{(x+1)(1) - (x-1)(1)}{(x+1)^2} = \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2} \neq 0$$

لاتوجد نقاط حرجه

+++++++++++++++++++ (-1)++++++++++++++++++++++



الدالة متزايده في { x:x>-1 } الدالة متزايده في {x:x<-1} لاتوجد نهايات عظمى او صغرى

ايجاد نقطة الانقلاب مناطق التقعر والتحدب

خطوات الحل:-

1- نطلع المشتقة الثانية

2- نساوي المشتقة الثانية بالصفر

3- نطلع قيمة x من مساواة المشتقة بالصفر

4- نعوض قيمة x بالدالة الاصلية علمود نطلع قيمة y(راح تكون عدنه نقطة او مجموعة نقاط (x,y) تمثل نقاط انقلاب

5- نرسم خط الاعداد ونحط عليه قيم x فقط (ناخذ قيم اكبر من قيمة x واقل منها علمود نطلع مناطق التقعر والتحدب)

اذا طلع الناتج موجب فتكون الدالة مقعرة

اذا طلع الناتج سالب فتكون الدالة محدبة

ملاحظة :- مرات نشتق المشتقة الاولى ونشتق المشتقة الثانية تطلع قيمة ثابتة (رقم)

- اذا طلع الرقم موجب الدالة مقعرة وماكو نقاط انقلاب
- اذا طلع الرقم سالب الدالة محدبة وماكو نقاط انقلاب
- اذا جانت الدالة كسرية بسطها ثابت فما راح يكون عدنة نقطة انقلاب (نتوقف عن الحل ونرسم خط الاعداد ونحط عليه القيمة الي تخلي المقام صفر)

مثال:-جد نقاط الانقلاب ومناطق التقعر والتحدب ان وجدت للدوال الآتية

1) $f(x) = 4 - (x+2)^2$ نشتق

$f'(x) = -2(x+2)(1) = -2x - 4$ نشتقها مرة ثانية

$f''(x) = -2 < 0$

الدالة محدبة في كل مجالها (لان طلع الناتج رقم سالب) .: لا توجد نقاط انقلاب

2) $f(x) = x^2$ نشتق

$f'(x) = 2x$

$f''(x) = 2 > 0$

الدالة مقعرة في كل مجالها (لان طلع الناتج رقم موجب) .: لا توجد نقاط انقلاب



3) $f(x) = x^3$ نشتق

$f'(x) = 3x^2$

$f''(x) = 6x$ نساويها بالصفر $\to 6x = 0 \to x = 0$ نعوضها بالدالة الاصلية

$f(0) = (0)^3 = 0 \to (0,0)$

إشارة $f''(x)$: $- - -$ 0 $+ + +$

تحدب | تقعر

4) $2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ شتق

$f^{-}(x) = 6x^2 - 6x - 12$

$f''(x) = 12x - 6$ نساويها بالصفر

$$12x - 6 = 0 \div 2 \to 2x - 1 = 0 \to 2x = 1 \to x = \frac{1}{2}$$

نعوضها بالداله الاصليه

$$f(x) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 12\left(\frac{1}{2}\right) + 1 \to \frac{1}{4} - \frac{3}{4} - 5 = -\frac{2}{4} - 5$$

$$\to -\frac{1}{2} - 5$$

$$= \frac{-1 - 10}{2} = -\frac{11}{2}$$

$(\frac{1}{2} . -\frac{11}{2})$ نقطة انقلاب

اشارة $f''(x)$: $------ (\frac{1}{2}) ++++++$

$\{x: x < \frac{1}{2}\}$ مناطق التحدب $\{x: x > \frac{1}{2}\}$ مناطق التقعر

5) $4x^3 - x^4$ نشتقها

$f'(x) = 12x^2 - 4x^3 \to f''(x) = 24x - 12x^2$ نساويها بالصفر

$24x - 12x^2 = 0 \div 12 \to 2x - x^2 = 0 \to x(2 - x) = 0$

$if\ x = 0 \to$ نعوضها بالدالة الاصلية $f(x) = 4(0)^3 - (0)^4 = 0$

(0,0) نقطة انقلاب

$or x = 2$ نعوضها بالدالة الاصلية

$f(x) = 4(2)^3 - (2)^4$

$= 32 - 16 = 16$

(2,16).: نقطه انقلاب

منطقة التقعر هي الفترة (0,2) ومناطق التحدب هي $\{x: x < 2\}\{x: x > 2\}$

$6) f(x) = x - \frac{1}{x} \quad , x \neq 0$ نشتق

$f'(x) = 1 + \frac{x.0 - 1.1}{x^2} = -\frac{1}{x^2} \rightarrow f''(x) = \frac{x^2.0 - (-1).2x}{x^4}$

$f''(x) = 0 \rightarrow \frac{2}{x} = 0 \rightarrow 2 \neq 0$

لا توجد نقاط انقلاب (لان دالة بسطها ثابت مكدرت اساويها بالصفر علمود انطلع النقطة)

منطقة التقعر $\{ x: x > 0\}$ منطقة التحدب $\{x: x < 0\}$

$7) f(x) = 4 - (x + 2)^4$ نشتق

$f'(x) = 0 - 4(x + 2)^3.1 = -4(x + 2)^3$

$f''(x) = -12(x + 2)^2$ نساويها بالصفر

$-12(x + 2)^2 = 0 \rightarrow x + 2 = 0 \rightarrow x = -2$ نعوضها بالدالة الاصلية

$f(x) = 4 - (-2 + 2)^4 = 4 - 0 = 4$

(-2,4) نقطة مرشحة انقلاب



مناطق التحدب $\{x: x < -2\}\{x: x > -2\}$

ولا توجد نقاط انقلاب

واجبات

س1:-جد نقطه الانقلاب للداله $f(x) = x^4 + 3x^2 - 3$

س2:-وزاري:-جد نقطه الانقلاب للمنحني $f(x) = (x-2)(x+1)^2$ ثم جد معادله المماس له عند نقطته

س3:- وزاري:-لتكن $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 6$ جد معادله المماس للمنحني عند نقطه انقلابه

اختبار المشتقة الثانية للنهايات العظمى والصغرى

خطوات الحل :-

1- نشتق الدالة f'(x)

2- نساوي المشتقة بالصفر نطلع قيم x

3- نشتق المشتقة الثانية f''(x)

4- نعوض قيم x الي طلعت من خلال مساواة المشتقة الاولى بالصفر بالمشتقة الثانية

اذا طلع الناتج موجب (رقم موجب) فراح تكون قيمة x عظمى محلية

اذا طلع الناتج سالب (رقم سالب) فراح تكون قيمة x صغرى محلية

الناتج صفر فالطريقة فاشلة (فنستخدم اختبار خط الاعداد بدل ذلك)

مثال / باستخدام المشتقة الثانية ان امكن جد النهايات المحلية للدوال الآتية

نشتق $1)\ f(x) = 6x - 3x^2 - 1$

نساوي بالصفر $f'(x) = 6 - 6x$

نعوضها بالمشتقة الثانية $6 - 6x = 0 \to -6x = -6 \div 6 \to x = 1$

$f''(x) = -6 \to -6 < 0$

الدالة تمتلك نقطة نهاية عظمى محلية عند x=1 .:

$2) f(x) = x - \frac{4}{x^2} \quad x \neq 0$ نشتق

$$f'(x) = 1 - \frac{x^2(0) - 4(2x)}{x^4}$$

$$= 1 - \ -\frac{8x}{x^4} = 1 + \frac{8}{x^3} = 0 \to 1 = -\frac{8}{x^3} \to x^3 = -8 \to x = -2$$

$$f'(x) = 0 + \frac{x^3(0) - 8.3x^2}{x^6} = -\frac{24x^2}{x^6} = -\frac{24}{x^4}$$

$$f''(-2) = \frac{-24}{(-2)^2} = \frac{-24}{16} < 0$$

الدالة لها نقطة نهاية عظمى محلية عند x=-2.:

$3) f(x) = x^3 - 3x^2 - 9$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$$

$$f''(x) = 6x - 6$$

$$f'(x) = 0 \to 3x^2 - 6x - 9 = 0 \div 3$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \to (x-3)(x+1) = 0$$

اما $x - 3 = 0 \to x = 3$

او $x + 1 = 0 \to x = -1$

$$f''(3) = 6 \times 3 - 6 = 18 - 6 = 12 > 0$$

الدالة تمتلك نقطة نهاية صغرى عند 3 .:

$$f''(-1) = 6(-1) - 6 = -6 - 6 = -12 < 0$$

الدالة تمتلك نقطة نهاية عظمى محليه عند 1- .:

$$d - f(x) = 4 - (x+1)^4$$

$$f'(x) = 0 - 4(x+1)^3(1) \to -4(x+1)^3$$

$$f''(x) = -12(x+1)^2(1) = -12(x+1)^2$$

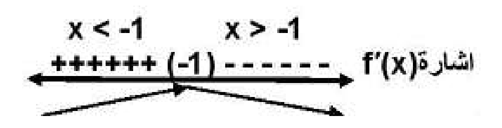


$$f'(x)=0\to -4(x+1)^3=0$$

$$\therefore x+1=0\to x=-1$$

$$f''(-1)=-12(-1+1)^2\to -12(0)=0$$

:. الطريقة (فاشلة)



الدالة تمتلك نقطة نهاية عظمى محلية عند x=-1

مثال/ لتكن $f(x)=x^2-\frac{a}{x}\quad x\neq 0$ برهن ان الدالة f لا تمتلك نهايه عظمى محليه

$$f'(x)=2x-\frac{x.0-a(1)}{x^2}=2x-\frac{-a}{x^2}=2x+\frac{a}{x}$$

$$f'(x)=0\to 2x+\frac{a}{x^2}=0\to 2x=\frac{-a}{x^2}\to 2x^3=-a$$

$$x^3=\frac{-a}{2}\to x=\sqrt[3]{-\frac{a}{2}}\dots\dots\dots(1)$$

$$f''(x)=2+\frac{x^2(0)-4(2x)}{x^4}\to 2+\frac{-2ax}{x^4}$$

$$f''(x)=2-\frac{2a}{x^3}\dots\dots\dots(2)$$

نعوض 1 في 2........

$$f''(x)=2-\frac{2a}{\left(\sqrt[3]{\frac{-a}{2}}\right)^3}=2-\frac{2a}{\frac{-a}{2}}=2-\frac{2a}{1}\times\frac{-2}{a}$$

$$=2-\frac{2}{1}\left(-\frac{2}{1}\right)\to 2-2(-2)$$

$$2+4=6>0$$

:. الدالة تمتلك نهاية صغرى ولا تمتلك نهاية عظمى

س:-وزاري:-واجب:-اذا كان منحني الدالة $f(x)=2ax^2+b$ وكانت $a\epsilon(-1,0,1,3)$ تمتلك نهاية عظمى محليه جد قيمة a؟

ايجاد الثوابت (مهم جدا)

راح ننطي ملاحظات عامة (مهمة جدا حول ايجاد الثوابت اضبطهم يالة تبدي تحل الآمثلة)

1- اي نقطة متكونة من (x,y) تحقق معادلة معناها تعوض قيمة x مكان كل x بالدالة وتساويها بقيمة y

2- كل نقطة حرجة بأي سؤال نستفاد منها نشتق المشتقة الاولى ونعوض بيها قيمة x ونساوي الدالة بالصفر

3- كل نقطة انقلاب بأي سؤال نستفاد منها نشتق المشتقة الثانية ونعوض بيها قيمة x ونساوي الدالة بالصفر

4- نقطة التماس اذا انطاها نشتق المشتقة الأولى ونساويها بميل المماس

5- اذا انطاني نقطة حرجة احداثيها السـيني بس (راح نشـتق المشـتقة الاولى ونعوض قيمة x ونساوي الدالة بالصفر)

6- اذا انطاني نقطة انقلاب احداثيها السـيني بس (راح نشـتق المشـتقة الثانية ونعوض قيمة x ونساوي الدالة بالصفر)

7- اذا انطاني معادلة مستقيم راح نطلع منها ميل المماس وراها نشتق المشتقة الأولى ونساويها بميل المماس

8- اذا كال بالسؤال ان الدالة لها نهاية صغرى او عظمى عند (رقم) فهذا الرقم راح يمثل قيمة y

9-- اذا جان ميل المماس يصـنع زاوية وية الاتجاه الموجب لمحور السـينات فراح يكون ميل المماس $=\tan\theta$

10- عدد المعادلات الي راح تكون عندي هي بعدد المجاهيل (يعني اذا مجهولين لازم اكون معادلتين)

عزيزي الطالب قم بفهم الملاحظات جيدا قبل البدأ بحل اي سؤال





جميع الأمثلة والتمارين الخاصة بالثوابت

مثال / اذ كانت (2,6) نقطة حرجة لمنحني الداله $f(x) = a - (x-b)^4$ فجد قيمة a,b وبين نوع النقطة الحرجة

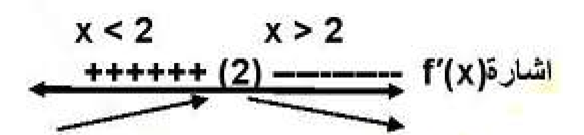
$f(x) = a - (x-b)^4$

$f'(x) = -4(x-b)^3$

$f'(2) = -4(2-b)^3 = 0$

$\therefore 2 - b = 0 \rightarrow b = 2$

$a - (2-2)^4 = 6 \rightarrow a = 6$



.: (2,6) نقطة نهاية عظمى محلية

مثال / عين قيمة الثابتين a,b لكي يكون منحنى الدالة $y = x^3 + ax^2 + bx$ نهاية عظمى محلية عند x=-1 ونهاية صغرى محلية عند x=2 ثم جد نقطة الانقلاب ان وجدت

$y = x^3 + ax^2 + bx \rightarrow y' = 3x^2 + 2ax + b$ نعوض قيمة x ونساويها بالصفر

$3(-1)^2 + 2a(-1) + b = 0 \rightarrow 3 - 2a + b = 0$

$-2a + b = -3 \dots\dots\dots (1)$

$3(2)^2 + 2a(2) + b = 0 \rightarrow 12 + 4a + b = 0$

$4a + b = -12 \dots\dots\dots (2) \rightarrow b = -12 - 4a \text{ in } 1$

$-2a + (-12 - 4a) = -3 \rightarrow -6a = 9 \rightarrow a = -\frac{3}{2}$ نعوضها في معادلة 2

$4\left(\frac{-3}{2}\right) + b = -12 \rightarrow -6 + b = -12 \rightarrow b = -12 + 6 \rightarrow b = -6$

$\therefore f'(x) = 3x^2 + 2\left(\frac{-3}{2}\right)x - 6 = 3x^2 - 3x - 6$

$, f''(x) = 0$ نساويها بالصفر

$6x - 3 = 0 \rightarrow 6x = 3 \rightarrow x = \frac{3}{6} \rightarrow x = \frac{1}{2}$ نعوضها بالدالة الاصلية

$\therefore f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 6^3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} - \frac{3}{2} - \left(\frac{1}{4}\right) - 3 = \frac{1}{8} - \frac{3}{8} - 3$

$\frac{-2}{8} - 3 = \frac{-2-24}{8} = \frac{-26}{8} = \frac{-13}{4}$

نقطة انقلاب $\therefore \left(\frac{1}{2}, -\frac{13}{4}\right)$

اشارة $f''(x)$: $- - - - - - \left(\frac{1}{2}\right) ++++++$



مثال :- اذا كانت 6 تمثل نهاية صغرى محلية لمنحني الدالة $f(x) = 3x^2 - x^3 + c$ فجد قيمة c ثم جد معادلة المماس للمنحني عند نقطة انقلابه .

$y = 6$

$f'(x) = 6x - 3x^2 \quad , f'(x) = 0 \rightarrow 6x - 3x^2 = 0 \div 3 \rightarrow 2x - x^2 = 0$

$x(2 - x) = 0 \rightarrow if\ x = 0$

$2 - x = 0 \rightarrow \text{or } x = 2$

$$- - - - \quad 0 \quad + + + \quad 2 \quad - - -$$

النقطة:. (0,6) نقطة نهاية صغرى محلية

$3(0)^2 - (0)^3 + c = 6 \rightarrow c = 6$

$f(x) = 3x^2 - x^3 + 6$

$f''(x) = 6 - 6x \quad , f''(x) = 0$

$6\text{-}6x = 0 \rightarrow 6 = 6x \rightarrow x = 1$

$y = 3(1)^2 - (1)^3 + 6 = 3 - 1 + 6 = 2 + 6 = 8$

اشارة $f''(x)$: $+ + + \quad 1 \quad - -$

تقعر   تحدب

$m = f'(1) = 6(1) - 3(1)^2 = 6 - 3 = 3$

$y - y1 = m(x - x1)$

$y - 8 = 3(x - 1)$

$y - 8 = 3x - 3 \rightarrow y - 8 - 3x - 3 = 0 \rightarrow y - 3x - 5 = 0$ ميل المماس

مثال :- اذا كان المستقيم $3x - y = 7$ يمس المنحني $f(x) = ax^2 + bx + c$ عند النقطة $(2 , -1)$ وكانت له نهاية صغرى محلية عند $x = \frac{1}{2}$ جد قيم $a , b , c \in R$.

الحل /

$$f'(x) = 2ax + b$$

$$3 = \frac{-3}{-1} = \frac{-\text{معامل } x}{\text{معامل } y} = \text{ميل المستقيم}$$

$$\therefore 2a(2) + b = 3 \rightarrow 4a + b = 3 \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$a(2)^2 + b(2) + c = -1 \rightarrow 4a + 2b + c = -1 \ldots\ldots\ldots (2)$$

$\therefore x = \frac{1}{2}$ نهاية صغرى محلية للدالة

$$2a\left(\frac{1}{2}\right) + b = 0 \rightarrow a + b = 0 \ldots\ldots\ldots (3)$$

$4a + b = 3$ نحل المعادلتين 1 و3 آنياً

$\mp a \mp b = 0$ بالطرح

$$3a = 3 \rightarrow a = 1$$

$1 + b = 0 \rightarrow b = -1$ نعوض قيمة a في معادلة 3

$4(1) + 2(-1) + c = -1 \rightarrow 4 - 2 + c = 0$ نعوض قيمتي b. a في معادلة 2

$$2 + c = -1 \rightarrow c = -1 - 2 \rightarrow c = -3$$

مثال \\ اذا كان للدالة $f(x) = ax^3 + 3x^2 + c$ نهاية عظمى محلية تساوي (8) ونقطة انقلاب عند $x = 1$ جد قيمتي $a , c \in R$.

$$f(x) = ax^3 + 3x^2 + c \rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 6x \rightarrow f''(x) = 6ax + 6$$

$$6a(1) + 6 = 0 \rightarrow 6a + 6 = 0 \rightarrow 6a = -6 \rightarrow a = -1$$

y=8

$$f'(x) = 0 \rightarrow 3(-1)x^2 + 6x = 0 \rightarrow (-3x^2 + 6x = 0) \div 3$$

$$-x^2 + 2x = 0$$

$$\rightarrow x = 0 \rightarrow x - x + 2 = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow x(-x + 2) = 0$$



$$- - - - 0 + + + 2 - - - -$$

$$-(2)^3 + 3(2)^2 + c = 8 \to -8 + 12 + c = 8 \to 4 + c = 8$$
$$c = 8 - 4 \to c = 4$$

مثال/ لتكن $a \in R$ ، $f(x) = x^2 + \frac{a}{x}, x \neq 0$ فجد قيمة a علما ان الدالة تمتلك نقطه انقلاب عند x=1 ثم بين ان الدالة لا تمتلك نهاية عظمى محلية

الحل /

$$f'(x) = 2x + \frac{x(0) - a(1)}{x^2} = 2x + \frac{-a}{x^2}$$

$$f''(x) = 2 + \frac{x^2(0) - (-a)(2x)}{x^2} = 2 + \frac{2ax}{x^4} = 2 + \frac{2a}{x^3}$$

$$f''(1) = 2 + \frac{2a}{1^3} = 0 \to 2 + \frac{2a}{1} = 0$$

$$2 + 2a = 0 \to 2a = -2 \to a = -1$$

$$\therefore f'(x) = 0 \to \left(2x + \frac{1}{x^2} = 0\right).x^2 \to 2x^3 + 1 = 0$$

$$2x^3 = -1 \to x^3 = \frac{-1}{2} \to x = \sqrt[3]{\frac{-1}{2}}$$

$$f''\left(\sqrt[3]{\frac{-1}{2}}\right) = 2 + \frac{2(-1)}{\left(\sqrt[3]{\frac{-1}{2}}\right)^3} = 2 + \frac{-2}{\frac{-1}{2}}$$

$$= 2 + (-2)\frac{(-2)}{1} = 2 + 4 = 6 > 0$$

∴ الدالة تمتلك نهاية صغرى محلية

∴ الدالة لا تمتلك نهاية عظمى محلية

مثـال / اذ كـان منحني الـدالـة $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ مقعرة في (x<1) ومحدبـة في (x>1) ويمس المســتقيم y+9x=28 عند النقطة (3,1) فجد قيم الاعداد الحقيقية a,b,c

x=1

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx$

$f''(x) = 6ax + 2b \rightarrow 6a(1) + 2b = 0 \rightarrow 6a + 2b = 0 \ldots\ldots\ldots(1)$

ميل المستقيم = $-\frac{\text{معامل x}}{\text{معامل}}$ = -9 = $-\frac{9}{1}$

$\therefore 3a(3)^2 + 2b\,(3) = -9$

$27a + 6b = -9 \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$

$27a + 9b + c = 1 \ldots\ldots\ldots(3)$

حل المعادلتين 1 و2 انيا

$6a + 2b = 0$

$\mp 9a \mp 2b = \mp 3$ (بالطرح)

$-3a = 3 \rightarrow a = -1$

نعوض قيمة a في معادله 1

$6(-1) + 2b = 0 \rightarrow -6 + 2b = 0 \rightarrow 2b = 6 \rightarrow b = 3$

نعوض عن قيمتي b,a في معادلة 3

$27(-1) + 9(3) + c = 1$

-27+27+c=1

$\therefore c = 1$



مثال اذا كانت $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ وكانت f مقعرة لكل $x > 1$ ومحدبة لكل $x < 1$ وللدالة f نقطة نهاية عظمى محلية $(-1 , 5)$ فجد قيم الثوابت $a , b , c \in R$.

$x=1$

$f''(1) = 0$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f''(x) = 6ax + 2b$

$f''(1) = 6a(1) + 2b = 0 \rightarrow 6a + 2b = 0 \ldots\ldots\ldots (1)$

$\because f'(-1) = 0 \quad . f(-1) = 5$

$f'(-1) = 3a(-1)^2 + 2b(-1) + c(-1) = 0$

$3a-2b+c=0 \ldots\ldots\ldots(2)$

$f(-1) = a(-1)^3 + b(-1)^2 + c(-1) = 5$

$-a+b-c=5\ldots\ldots\ldots(3)$

نحل المعادلتين 2 و3 انيا

$3a - 2b + c = 0$

$-a+b-c=5$ بالطرح

$2a-b=5$

بحل المعادلتين 1 و4 انيا

$6a + 2b = 0 \div 2$

$2a-b=5$

$3a+b=0$

$2a-b=5$ بالجمع

$5a=5 \quad a=1$

نعوض قيمة a في 1

$$6(1)+2b=0\to 6+2b=0\to 2b=-6\to b=-3$$

$$3(1)-2(-3)+c=0\to 3+6+c=0\to 9+c=0\to c=-9$$

مثال/ لتكن $f(x)=ax^3-6x+b$ حيث ان $b\in R$ لـ a(-4,8) جد قيمة a اذ كانت أ-الدالة محدبة f ب- الدالة f مقعرة

$$f'(x)=2ax-6\to f''(x)=2a\to f''(x)<0$$

$\therefore 2a<0\div 2$

$a<0 \to a=-4$

$f''(x)>0$ ب الدالة مقعرة

$2a>0\div 2\to a>0\to a=8$

مثال :-اذا كانت $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ ، $g(x) = 1 - 12x$ وكان كل من g , f متماسان عند نقطة الانقلاب وكانت للدالة f نقطة انقلاب هي (1 ، -11) فجد قيم الثوابت $a , b , c \in R$.

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c$$

$$f''(x)6ax+2b$$

$$\therefore 6a(1)+2b=0\to 6a+2b=0\ \dots\dots(1)$$

$$g'(x)=-12$$

$$\therefore 3a(1)^2+2b(1)+c=-12$$

$$3a+2b+c=-12\ \dots\dots\dots(2)$$

$$a(1)^3+b(1)^2+c(1)=-11$$

$$a+b+c=-11$$

بحل المعادلتين 2 و3 انيا

$$3a+2b+c=-12$$

$\mp a\mp b\mp c=\pm 11$ بالطرح



$2a + b = -1$ بحل المعادلتين 1و4 انيا

$6a + 2b = 0$

$\mp 2a \mp b = \pm 1$

a=1

نعوض قيمة a في معادلة 1

$6(1) + 2b = 0 \rightarrow 6 + 2b = 0$

$2b = -6 \rightarrow b = -3$

$1 - 3 + c = -11 \rightarrow -2 + c = -11 \rightarrow c = -11 + 2 \rightarrow c = -9$

واجبات

س1:-وزاري:-اذا كانت $f(x) = 3 + ax + bx^2$ تمتلك نقطة حرجه (1,4) جد قيمتي a,b الحقيقيتان ثم بين نوع النقطه الحرجه ؟

س2:-وزاري:-اذا كانت (1,-2) نقطة حرجه لمنحني الدالة $f(x) = ax^2 - (x + b)^2$ فجد قيمتي a,b ثم بين نوع النقطه الحرجه؟

س3:-اذا كان للمستقيم 3x-y=4 مماسا للمنحني $f(x) = bx^2 + cx$ عند x=2 وكان للمنحني نهايه صغرى عند x=1/2 فجد b,c

س4:-اذا كان $f(x) = x^3 + bx^2 + cx$ فجد $a, b, c \in R$ اذا علمت للمنحني نقطتين حرجتين عند x=3, x=-1 ثم بين نوع النقطتين ؟

س5:-وزاري :- اذا كانت $f(x) = ax^3 + bx^2$ جد قيمتي a,b اذا علمت ان للمنحني نقطة انقلاب (1,2)؟

س6:- لتكن $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ فجد قيمه a,b اذ علمت ان للدالة نهايه صغرى عند x=3 ونهايه عظمىٰ عند x=1

س7:- اذا كانت الدالة $f(x) = ax^3 + bx^2 + 15x$ نقطة نهايه عظمىٰ محليه *(1,8)* جد قيمه *a ,b*

س8:-لتكن $f(x) = x^2 + a$ وكان $g(x) = x + b$ للدالة *(fog)* نهايه صغرىٰ عند النقطة *(4,9)* فجد قيمه *a,b*

رسم الدوال

1- اوسع مجال للدالة

شنو اوسع مجال؟ شوف أذا جانت الدالة كثيرة حدود يعني بيه حدود هواي يعني مو داله كسرية يكون اوسع مجال للدالة هوR

اذ جانت الدالة كسرية شنو اوسع مجال اله؟ شوف اوسع مجال للدالة هو

R\الرقم الي يجعل المقام صفر

2- المحاذيات

شوف شلون نطلع المحاذيات اذ جانت الدالة كثيرة حدود هاي مابيه محاذيات

أذا جانت الدالة كسرية اكو محاذيات شلون أطلعهم؟

المحاذي العمودي هو الرقم الي خله المقام يساوي صفر

المحاذي الافقي هذا حسب نوع الدالة شلون يعني اذ جانت الدالة نسبية اي كسرية بسطها ومقامها متغيرات شلون نطلع المحاذي

حسب هذا القانون $y = \frac{\text{معامل اعلى اس في البسط}}{\text{معامل اعلى اس في المقام}}$.

زين اذجانت كسرية وبسطها ثابت هاي مباشرا المحاذي الافقي صفر



3-نقاط التقاطع

مرة تفرض x صفر ونطلع قيمة y

مرة نفرض yصفر ونطلع قيمة x

4-التناظر

1- اذا جان $f(-x)= f(x)$ فان الدالة متناظرة حول محور الصادات

2- اذا جان $f(-x)=-f(x)$ فان الدالة متناظرة حول نقطه الاصل

ملاحظة:- للفائدة:- اذ جانت اسس الدالة زوجية تكون الدالة متناظرة حول الصادات
واذ جانت فردية نكول حول نقطة الاصل
واذا جانت فردية وزوجية ماكو تناظر

5- النهايات العظمى والصغرى المحلية

6- نقاط الانقلاب أذا وجدت



جميع الأمثلة والتمارين الخاصة برسم الدوال

مثال :- باستخدام معلوماتك في التفاضل ارسم منحني الدوال الآتية

1) $f(x) = x^5$ وزاري مهم

1- اوسع مجال للدالة R (لان دالة كثيرة حدود)

2- لا توجد محاذيات

3- التناظر

أ- مع محور الصادات $F(-X) = F(X)$

$F(-X) = (-X)^5 = -X^5 \neq F(X)$ لايوجد تناظر

$f(-x) = -f(x) \rightarrow -f(x) = -(x)^5 = -x^5 = f(-x)$ يوجد تناظر

4- نقاط التقاطع

If x=0

$y = (0)^5 \rightarrow (0,0)$ نقطة التقاطع

If y=0

$x^5 = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0,0)$

5-النهايات

$f'(x) = 5x^4 \rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow 5x^4 = 0 \rightarrow x = 0$

$f(x) = (0)^5 = 0 \rightarrow (0,0)$ نقطة حرجة

اشارة $f'(x)$: x < 0 ++++++ 0 ++++++ x > 0

مناطق التزايد $\{x : x \in R ; x > 0\}$ $\{x : x \in R ; x < 0\}$

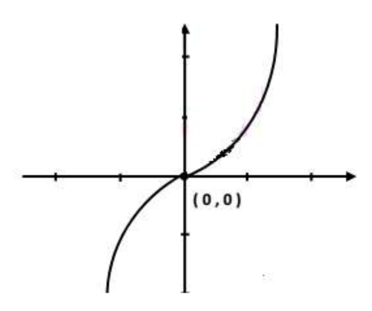
الداله لاتمتلك نهايات عظمى واخرى لانها متزايده

6-نقاط الانقلاب

$f''(x) = 20x^3 \quad , f''(x) = 0 \rightarrow 20x^3 = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0(0,0)$

اشارة $f'(x)$: x < 0 ------ 0 ++++++ x > 0

نقطة انقلاب $(0,0)$ منطقة التحدب $x: x < 0$ منطقة التقعر $x: x > 0$



$2) \quad f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

1- اوسع مجال للداله =R

2- لا يوجد محاذيات

التناظر

$f(-x) = (-x)^3 - 3(-x)^2 + 4 = -x^3 - 3x^2 + 4 \neq f(x)$

$-f(x) = -x^3 + 3x^2 - 4 \neq f(-x) \rightarrow$ لاتناظر

4- نقاط التقاطع

If x=0

$y = (0)^3 - 3(0)^2 + 4 = 4 \rightarrow (0,4)$

5- النهايات

$f'(x) = 3x^2 - 6x \quad , f'(x) = 0 \rightarrow (3x^2 - 6x = 0) \div 3 \rightarrow x^2 - 2x = 0$

$x(x-2) = 0 \rightarrow \text{if } x = 0 \text{ or} x = 2$

$if y = (0)^3 - 3(0)^4 + 4 = 4 \rightarrow (0,4)$

$or\ y = (2)^3 - 3(2)^2 + 4 = 0 \rightarrow (2,0)$

اشارة $f'(x)$: + + + 0 − − − 2 + + +

منطقة التناقص الفترة المفتوحة $(0, 2)$

مناطق التزايد : $\{x : x < 0\}, \{x : x > 2\}$

6- نقاط الانقلاب

$f''(x) = 6x - 6, \qquad f''(x) = 0 \rightarrow (6x - 6 = 0) \div 6 \rightarrow x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$

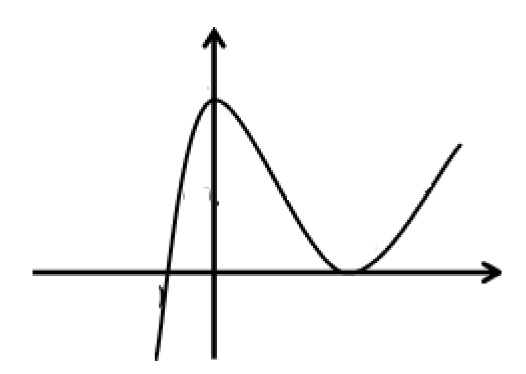
$f(x) = 1^3 - 3(1)^2 + 4 = 2$ $(1 , 2)$ نقطه مرشحه للانقلاب

اشارة $f''(x)$: − − − 1 + + +

تحدب تقعر

مناطق التقعر $\{x : x > 1\}$ و مناطق التحدب $\{x : x < 1\}$





$$3)\ f(x)=\frac{3x-1}{x+1}$$

-1 $x+1=0\rightarrow\quad x=-1$

اوسع مجال للدالة 1- R/-1

2- المحاذيات العمودي :محاذي X=-1 المحاذي الافقي y=3

3- التناظر

f(-x)=f(x)

$f(-x)=\frac{3(-x)-1}{-x-1}=\frac{-3x-1}{-x-1}\neq f(x)$ لاتناظر

$f(-x)=-f(x)\rightarrow -f(x)=\frac{-3x+1}{x+1}\neq f(-x)$ لاتناظر

4-نقاط التقاطع

If x=0

$y=\frac{3(0)-1}{0+1}=-\frac{1}{1}=-1(0,1)$ نقطة تقاطع

Or y=0

$0=\frac{3x-1}{x+1}\rightarrow 3x-1=0\rightarrow 3x=1\rightarrow x=\frac{1}{3}\rightarrow\left(\frac{1}{3},0\right)$ نقطة تقاطع

5- النهايات

$$f'(x)=\frac{(x+1).3-(3x-1).1}{(x+1)^2}=\frac{3x+3-3x+1}{(x+1)^2}=\frac{4}{(x+1)^2}$$

$$f'(x)=0\rightarrow\frac{4}{(x+1)^2}=0\rightarrow 4\neq 0$$

.: لا توجد نقاط حرجة او نهايات عظمى او صغرى

x<-1 x > -1
++++++(-1) ++++++ اشارة f'(x)

مناطق التزايد هي $(x:x<-1)(x:x>-1)$

6-نقاط الانقلاب

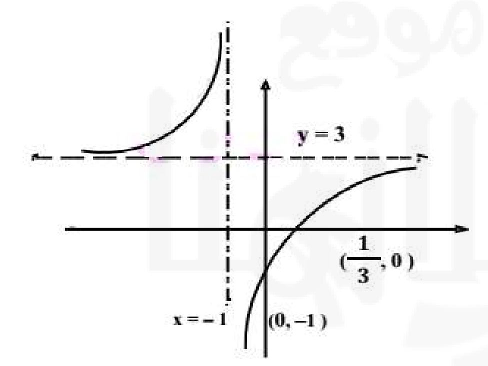
$$f''(x)=\frac{(x+1)^2\times(0)-4\times 2(x+1)\times 1}{(x+1)^4}=-\frac{8}{(x+1)^4}=\frac{-8}{(x+1)^3}$$

$$f''(x)=0\rightarrow-\frac{8}{(x+1)^3}=0\rightarrow-8\neq 0$$

لاتوجد نقاط انقلاب

++++++ (-1) - - - - - - اشارة f''(x)

مناطق التقعر هي $(x;x>-1)$ مناطق التحدب هي $(x;x<-1)$



4) $f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$

1- اوسع مجال للدالة هو R

$x^2+1\neq 0$



2- المحاذيات

أ- العمودية لاتوجد محاذيات عمودية

ب- الافقي $y=1$

3- التناظر مع محور الصادات

$f(-x)=\frac{(-x)^2}{(-x)^2+1}=\frac{x^2}{x^2+1}=f(x)$ يوجد تناظر

f(-x)=-f(x) مع نقطة الاصل

$-f(x)=\frac{(-x)^2}{x^2+1}\neq f(-x)$ لاتناظر

4- نقاط التقاطع

If x=0

$y=\frac{(0)^2}{(0)^2+1}=\frac{0}{1}=0\rightarrow(0,0)$ نقطة تقاطع

Or y=0

$\frac{(x)^2}{x^2+1}=0\rightarrow x^2=0\rightarrow x=0\rightarrow(0,0)$ نقطة تقاطع

5- النهايات

$$f'(x)=\frac{(x^2+1).2x-x^2(2x)}{(x^2+1)^2}=\frac{2x^3+2x-2x^3}{(x^2+1)^2}=\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

$f'(x)=0\rightarrow\frac{2x}{(x^2+1)^2}=0\rightarrow 2x=0\rightarrow x=0=y=0\rightarrow(0,0)$ نقطة حرجة

x< 0 x > 0
------ (0) ++++++ f'(x) اشارة

$(x: x\in R, x>0)$ مناطق التزايد $(x: x\in R, x<0)$ مناطق التناقص

6- نقاط الانقلاب

$$f''(x) = \frac{(x^2+1)^2.2 - 2x.2(x^2+1)2x}{(x^2+1)^4} = \frac{2(x^2+1)^2 - 8x^2(x^2+1)}{(x^2+1)^4}$$

$$\frac{2(x^2+1)[x^2+1-4x^2]}{(x^2+1)^4} = \frac{2[1-3x^2]}{(x^2+1)^3} = f''(x) = 0 \to \frac{2[1-3x^2]}{(x^2+1)^3} = 0$$

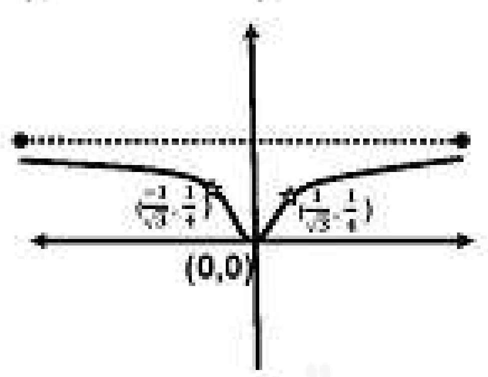
$$1-3x^2 = 0 \to 1 = 3x^2 \to x^2 = \frac{1}{3} \to x = \mp\frac{1}{\sqrt{3}} \to y = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)}{\left(\frac{1}{3}\right)+1} = \frac{1}{4}$$

نقطتان مرشحتان للانقلاب $\left(\mp\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{4}\right)$

---------+++++-----

منطقة التقعر هي الفتره $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

مناطق التحدب هي الفتره $\{x : x > \frac{1}{\sqrt{3}}\}$ $\{x : x < -\frac{1}{\sqrt{3}}\}$



(تمارين رسم الدوال واجب)

حاول ان تحلهم وترسلهم لنا عبر التلكرام @Math_Hamza



التطبيقات

1- نفرض المتغيرات برموز او اسماء معينة
2- نطلع علاقة تربط بين المتغيرات ونستفاد من اي عدد موجود بالسؤال
3- نكتب القاعدة الدالة الي دائما تجي وياها كلمة (اكبر ما يمكن واصغر ما يمكن)
4- نخلي العلاقة بدالة متغير واحد يعني النقطة الثانية والثالثة ندمجهم
5- نشتق العلاقة الناتجة ونساويها بالصفر ونحل المعادلة
6- نعوض عن المعلوم الي طلعناه لايجاد المجهول الاخر
7- نخلي القيمة الناتجة على خط الاعداد علمود نتأكد من انو هي اكبر ما يمكن او اصغر ما يمكن

تكوين العلاقة حسب القاعدة ادناه

زيادة معناها (-)

(العدد بعد كلمة زيادة)-(العدد قبل كلمة زيادة) = العلاقة

2-حاصل ضربهما m=xy　　　3-مجموع مربعيهما $m = x^2 + y^2$

3-حاصل ضرب احدهما في مربع الاخر $m = x^2y$

4-حاصل ضرب مربع احدهما في مربع الاخر $m = x^2y^2$

5-حاصل ضرب مربع احدهما في مكعب الاخر $m = x^3y^2$

مثال / ما العدد الذي زيادته على مربعه أكبر ما يمكن



نفرض العدد x

مربعه = x^2

$f(x) = x - x^2$ نشتقها $\rightarrow f'(x) = 1 - 2x$ نساويها بالصفر $f'(x) = 0$

$1 - 2x = 0 \rightarrow 1 = 2x \rightarrow 2x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{2}$

مثال / جد العدد الذي زيادته ثلاثة امثال مربعه على مكعبه اكبر ما يمكن

نفرض العدد $x=$

ثلاث امثال مربعه $=3x^2$

مكعبه $=x^3$

$$f(x)=3x^2-x^3 \rightarrow f'(x)=6x-3x^2 \;, f'(x)=0 \rightarrow 6x-3x^2=0$$
$$2x-x^2=0 \rightarrow x(2-x)=0$$

يهمل $x=0$ اما

$$2-x=0 \rightarrow 2=x \rightarrow x=2$$

مثال /اطلقت رصاصة الى الاعلى وكان ارتفاعها m متر في نهاية t من الثواني بحيث $m=224t-16t^2$ احسب اقصى ارتفاع تصل اليه الرصاصة

$$m=224t-16t^2$$
$$m'=224-32t \rightarrow 224-32t=0 \rightarrow 224=32t$$
$$32t=224 \rightarrow t=\frac{224}{32}=7 \rightarrow m=224(7)-16(7)^2$$
$$=1568-784=784$$

مثال :- **جد العدد الذي اذا اضيف الى نظيره الضربي يكون الناتج اكبر مايمكن**

الحل \ نفرض ان العدد x ونظيره الضربي $\frac{1}{x}$

$$A=x+\frac{1}{x} \Rightarrow A=x+x^{-1}$$
$$A'=1-x^{-2} \Rightarrow [\,1-\frac{1}{x^2}=0\,]\,.\,x^2 \Rightarrow x^2-1=0$$
$$x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$$
$$A''=2x^{-3} \Rightarrow A''=\frac{2}{x^3}$$

$A''(1)=2>0$ (اصغر مايمكن) في نهايته الصغرى

$A''(-1)=-2<0$ (اكبر مايمكن) في نهايته العظمى

اي ان العدد المطلوب يساوي (-1)



مثال \\ جد العدد الذي اذا اضيف الى مربعه يكون الناتج اصغر مايمكن .

نفرض العدد=x

مربع العدد=x^2

$$m = x + x^2 \rightarrow m' = 1 + 2x \quad , m' = 0$$

$$1 + 2x = 0 \rightarrow 2x = -1 \rightarrow x = \frac{-1}{2} (\text{العدد})$$

مثال / جد عددين موجبين مجموعهما 75 وحاصل ضرب احدهما في مربع الآخر أكبر مايمكن .

نفرض العدد الاول =x

نفرض العدد الثاني=y

$$m = x.y^2 \ldots\ldots\ldots(1)$$

$$x + y = 75 \rightarrow x = 75 - y \ldots\ldots\ldots(2)$$

نعوض علاقه 2 في علاقه 1

$$m = (75 - y).y^2 \rightarrow m = 75y^2 - y^3$$

$$m' = 150y - 3y^2 \quad , m' = 0$$

$$150y - 3y^2 = 0 \div 3 \rightarrow 50y - y^2 = 0 \rightarrow y(50 - y) = 0$$

اما $y = 0$(تهمل)

او $50 - y = 0 \rightarrow 50 = y \rightarrow y = 50$ العدد الثاني

$\therefore x = 75 - 50 \rightarrow x = 25$ العدد الاول

واجبات:-

1)جد العدد اذا اضيف الى نظيره الضربي يكون الناتج اكبر مايمكن ؟((وزاري))

2) جد عددين مجموعهما 20 ومجموع احدهما اكبر مايمكن ؟

3) جد العدد الذي زيادته على مربعه اكبر مايمكن ؟

مثال \\ جد نقطة او نقاط تنتمي الى القطع الزائد $y^2 - x^2 = 3$ بحيث تكون اقرب مايمكن الى النقطة (4 ، 0) .

نفرض النقطة (x,y) , $(0,4)$

$$s = \sqrt{(x2 - x1)^2 + (y2 - y1)^2}$$

$$s = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 4)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - 8y + 16} \dots\dots\dots (1)$$

$$y^2 - x^2 = 3 \rightarrow y^2 - 3 = x^2$$

$$x^2 = y^2 - 3 \dots\dots\dots (2)$$

نعوض 2 في 1

$$s = \sqrt{y^2 - 3 + y^2 - 8y + 16} = \sqrt{2y^2 - 8y + 13}$$

$$s' = \frac{(4y - 8)}{2\sqrt{2y^2 - 8y + 13}} = 0 \; (s' = 0)$$

$$4y - 8 = 0 \rightarrow 4y = 8 \rightarrow y = 2$$

نعوض في 2

$$x^2 = (2)^2 - 3 = 4 - 3 = 1 \rightarrow x = \mp 1$$

النقاط هي:. $(1,2)$ $(-1,2)$

مثال \\ مجموع محيطي دائرة ومربع يساوي 60cm اثبت انه عندما يكون مجموع مساحتي الشكلين اصغر مايمكن فان طول قطر الدائرة يساوي طول ضلع المربع .

نفرض نصف قطر الدائرة =r نفرض طول ضلع المربع =x

$$A = x^2 + r^2\pi \dots\dots\dots (1)$$

$$[4x + 2\pi r = 60] \div 2 \rightarrow 2x + \pi r = 30$$

$$\pi r = 30 - 2x \rightarrow r = \frac{30 - 2x}{\pi} \dots\dots\dots (2)$$



نعوض 2 في 1

$$A = x^2 + \left(\frac{30 - 2x}{\pi}\right)^2 \pi \rightarrow A = x^2 + \left(\frac{900 - 120x + 4x^2}{\pi^2}\right).\pi$$

$$A = x^2 + \frac{900 - 120x + 4x^2}{\pi} \rightarrow A' = 2x + \frac{-120 + 8x}{\pi}, A' = 0$$

$$\left(2X + \frac{-120 + 8X}{\pi} = 0\right).\pi \rightarrow 2\pi X - 120 + 8X = 0$$

$$(2\pi X + 8X = 120) \div 2 \rightarrow \pi X + 4X = 60$$

$$X(\pi + 4) = 60 \rightarrow X = \frac{60}{\pi + 4}\text{(طول ضلع المربع)}$$

بالتعويض في 2

$$r = \frac{30 - 2\left(\frac{60}{\pi+4}\right)}{2} = \frac{\frac{30}{1} - \frac{120}{\pi+4}}{\pi} = \frac{\frac{30\pi+120-120}{\pi+4}}{\pi} = \frac{\frac{30\pi}{\pi+4}}{\pi}$$

$$\frac{30\pi}{\pi + 4} \times \frac{1}{\pi} = \frac{30}{\pi + 4}$$ نصف قطر الدائرة

طول القطر $2r = 2\left(\frac{30}{\pi+4}\right) = \frac{60}{\pi+4}$ طول ضلع المربع

مثال \\ صنع صندوق مفتوح من قطعة نحاس مربعة الشكل طول ضلعها 12cm وذلك بقص اربعة مربعات متساوية الابعاد من اركانها الاربعة ثم ثنيت الاجزاء البارزة منها ، ماهو الحجم الاعظم لهذه العلبة .

نفرض طول ضلع المربع المقطوع=x

طول ضلع الصندوق =12-2x

ارتفاع الصندوق = x

حجم متوازي السطوح =مساحه القاعده*الارتفاع

$$v = (12 - 2x)(12 - 2x).x$$

$$v = (12 - 2x)^2.x$$

$$v = (144x - 48x + 4x^2).x$$

$v = 144x - 48x^2 + 4x^3$

$v' = 144 - 96x + 12x^2 \qquad v' = 0$

$(144 - 96x + 12x^2 = 0) \div 2 \rightarrow 12 - 8x + x^2 = 0$

$x^2 - 8x + 12 = 0 \rightarrow (x-6)(x-2) = 0$

اما $x - 6 = 0 \rightarrow x = 6$ (يهمل)

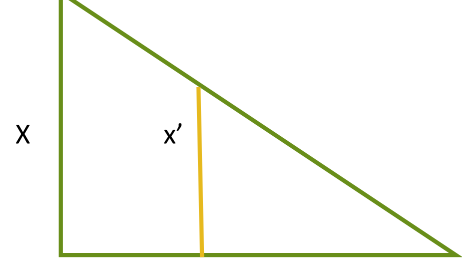
او $x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$

$\therefore v = (12 - 2 \times 2)^2 \times 2 = (12-4)^2 \times 2 = 8^2 \times 2 = 64(2) = 128cm^3$

ملاحظات1- عبارة اصغر او اكبر (مستطيل –مربع – مثلث –دائرة) تعني مساحة

2-اي شكل داخل مثلث او مخروط (نطبق علاقه تشابه مثلثين)

$$\frac{(\text{طول قاعده المثلث الكبير})}{\text{طول قاعده المثلث الصغير}} = \frac{(\text{ارتفاع المثلث الكبير})}{\text{ارتفاع المثلث الصغير}}$$



2-مرات نحتاج فرضيه جزء من الابعاد والبعد غير منصف فطريقه الحل هي الجزء المفروض الباقي = الكلي –العدد المعلوم

3
3
h-3

3-اذا مالكينه داله بالشكل الصريح فنعتمد على الشكل فاذا كان ذو بعدين (معناه مساحه) واذا جان ثلاثي الابعاد معناه حجم

4- اذا لكينه العبارات التاليه تكون الداله بالشكل التالي

اكبر مساحه --------- مساحه المستطيل

اقل محيط----------- محيط المستطيل

اقرب , ابعد نقطه ----- قانون المسافه بين نقطتين



مثال/ جد اقل محيط ممكن لمستطيل الذي مساحته $16cm^2$

نفرض طول المستطيل =x نفرض عرض المستطيل =y

محيط المستطيل = 2(الطول * العرض)

$$p = 2(x + y) \dots\dots\dots (1)$$

مساحه المستطيل =الطول * العرض

$$x.y = 16 \to x = \frac{16}{y} \dots\dots\dots (2)$$

نعوض 2في1

$$p = 2\left(\frac{16}{y} + y\right) \to p' = 2\left(\frac{y(0) - 16 \times 1}{y^2} + 1\right) \ , p' = 0$$

$$2\left(\frac{-16}{y^2} + 1\right) = 0 \to \left[\frac{-16}{y^2} + 1 = 0\right] \times \ y^2$$

$$-16 + y^2 = 0 \to y^2 = 16 \to y = 4$$ (عرض المستطيل)

$$\therefore x = \frac{16}{4} = 4$$ (طول المستطيل)

ملاحظة / اي بعد مقسوم من المنتصف (الطول او العرض او الارتفاع ..الخ) نفرضه 2x وليس x

مثال/ جد بعدي اكبر مستطيل يوضع داخل المنطقة المحددة بالدالة $f(x) = 12 - x^2$ ومحور السينات بحيث ان رأسان من رؤوسه تقع على المنحني والرأسان الآخران يقعان على محور السينات ، ثم جد محيطه .

نجد نقاط تقاطع الدالة مع المحورين

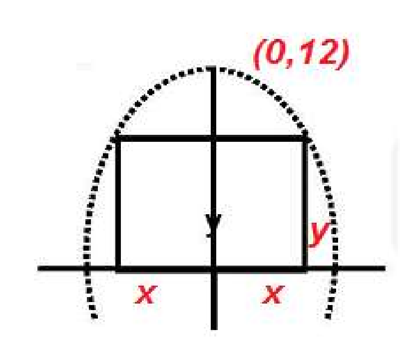
$$x = 0 \to y = 12 - (0)^2 = 12 \to (0, 12)$$

$$y = 0 \to 12 - x^2 = 0 \to x^2 = 12 \to x = \mp\sqrt{12}$$

$$= \mp 2\sqrt{3} \to (\mp 2\sqrt{3}, 0)$$

نفرض احد البعدين 2x والاخر y

$$A = 2x \times y \ldots\ldots 1$$
$$y = 12 - x^2 \ldots\ldots 2$$



$$A = 2X(12 - X^2) = 24x - 2x^3 \left(\text{تعويض 2في 1}\right)$$

$$A' = 24 - 6x^2$$

$$A' = 0 \to (24 - 6x^2 = 0) \div 6 \to 4 - x^2 = 0 \to x^2 = 4 \to x = \mp 2$$

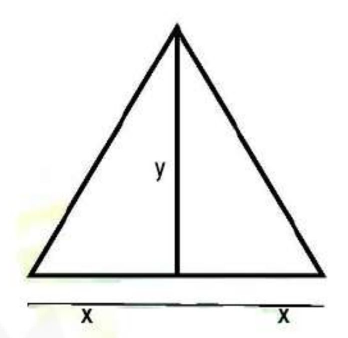
$$2x = 2(2) = 4 \ (\text{احد البعدين})$$

$$\therefore y = 12 - (2)^2 = 12 - 4 = 8$$

مثال / جد اكبر مساحة لمثلث متساوي الساقين طول كل من ساقيه $8\sqrt{2}cm$

نفرض طول القاعدة =2x , نفرض الارتفاع =h

$$A = \frac{1}{2}(2x)y = x \times y \ldots\ldots\ldots 1$$



$$x^2 + y^2 = \left(8\sqrt{2}\right)^2$$

$$x^2 + y^2 = 128 \to x^2 = 128 - y^2$$

$$x = \sqrt{128 - y^2} \ldots\ldots\ldots (2)$$


نعوض 2في 1

$$A = \sqrt{128 - y^2}.y = \sqrt{128 - y^2.y^2} = \sqrt{128y^2 - y^4}$$

$$A' = \frac{256y - 4y^3}{2\sqrt{128y^2 - y^4}}, A' = 0 \to \frac{256y - 4y^3}{2\sqrt{128y^2 - y^4}} = 0$$

$$\therefore (256y - 4y^3 = 0) \div 4 \to 64y - y^3 = 0 \to y(64 - y^2) = 0$$

$y = 0$ يهمل

$$64 - y^2 = 0 \to y^2 = 64 \to y = 8$$

$$\therefore x = \sqrt{128 - 64} = \sqrt{64} = 8 \to A = 8.8 = 64$$



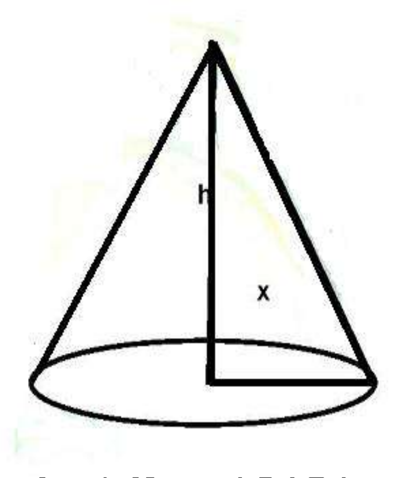
ملاحظة /

1- عند دوران مثلث قائم الزاوية حول احد اضلاعه القائمين فأن الشكل المتكون **(مخروط)** يكون نصف قطر قاعدته وارتفاعه هما ضلعي المثلث القائمين

2- عند دوران **(مستطيل او مربع)** حول احد اضلاعه فان الشكل المتكون هو اسطوانة

3- عبارة اكبر او أصغر **(مخروط , اسطوانة , كرة ,متوازي السطوح المستطيلة, مكعب)** المقصود بها حجم

مثال/ جد اكبر حجم لمخروط دائري قائم ناتج من دوران مثلث قائم الزاويه طول وتره $6\sqrt{3}$ دوره كاملة حول احد ضلعيه القائمين



نفرض نصف قطر قاعدة المخروط =r

نفرض ارتفاع المخروط =h

$$v = \frac{1}{3}\pi r^2 h \ldots\ldots\ldots 1$$

بتطبيق فيثاغورس

$$r^2 + h^2 = 108 \rightarrow r^2 = 108 - h^2 \ldots\ldots\ldots 2$$

نعوض معادله 2 في 1

$$v = \frac{1}{3}\pi(108 - h^2).h = \frac{1}{3}\pi(108h - h^3)$$

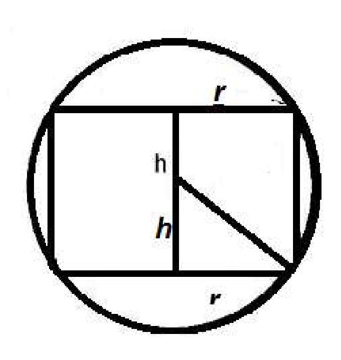
$$v' = \frac{1}{3}\pi(108 - 3h^2) \quad , v' = 0$$

$$\frac{1}{3}\pi(108 - 3h^2) = 0 \rightarrow (108 - 3h^2) = 0] \div 3$$

$$36 - h^2 = 0 \rightarrow h^2 = 36 \rightarrow h = 6$$

$$r^2 = 108 - 36 = 72 \quad \rightarrow \therefore v = \frac{1}{3}\pi(72)(6) = \ 144\pi cm^2$$

مثال / جد ارتفاع اكبر اسطوانة دائرية قائمة توضع داخل كره نصف قطرها $4\sqrt{3}$



نفرض نصف القطر =r

نفرض الارتفاع =h

أرتفاع الأسطوانة = 2h

$v = 2\pi r^2 h \dots\dots\dots 1$

بتطبيق فيثاغورس

$r^2 + h^2 = (4\sqrt{3})^2 \rightarrow r^2 + h^2 = 48$

$r^2 = 48 - h^2 \dots\dots\dots 2$ نعوض 2 في 1

$v = 2\pi(48 - h^2)h = 2\pi(48h - h^3)$

$v' = 2\pi(48 - 3h^2) \ , v' = 0$

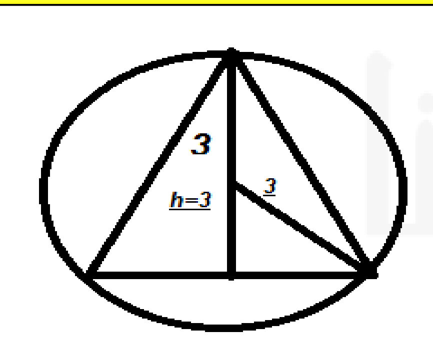
$2\pi(48 - 3h^2) = 0 \rightarrow (48 - 3h^2) = 0 \div 3 \rightarrow 16 - h^2 = 0$

$16 = h^2 \rightarrow h^2 = 16 \rightarrow h = 4$

$2h = 2(4) = 8cm$

$\therefore r^2 = 48 - 16 \rightarrow r^2 = 32 \rightarrow r = \sqrt{32} = \sqrt{16} \times 2 = 4\sqrt{2}$

مثال/ جد حجم مخروط دائري قائم يمكن وضعه داخل كرة نصف قطرها 3cm



نفرض نصف القطر =r

نفرض الارتفاع =h

$v = \frac{1}{3}\pi r^2 \dots\dots\dots 1$

بتطبيق فيثاغورس

$r^2 + (h - 3)^2 = 9$

$r^2 + h^2 - 6h + \cancel{9} = \cancel{9}$



$r^2 = 6h - h^2 \dots\dots\dots (2)$ نعوض 2 في 1

$$v = \frac{1}{3}\pi(6h - h^2)h \rightarrow v = \frac{1}{3}\pi(6h^2 - h^3)$$

$$v' = \frac{1}{3}\pi(12h - 3h^2) \ , \qquad v' = 0$$

$$\frac{1}{3}\pi(12h - 3h^2) = 0 \rightarrow \left((12h - 3h^2) = 0\right) \div 3$$

$4h - h^2 = 0 \rightarrow h(4 - h) = 0 \rightarrow h = 0$ يهمل

او $4 - h = 0 \rightarrow h = 4$ الارتفاع

نعوض في 2

$$r^2 = 6(4) - (4)^2 \rightarrow r^2 = 24 - 16 = 8$$

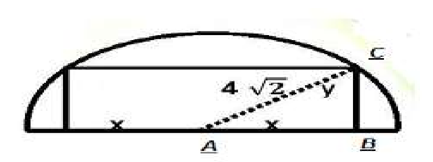
$$r = \sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = 2\sqrt{2}$$

$$;.v = \frac{1}{3}\pi(8)(4) = \frac{32\pi}{3}cm^3$$

مثال /جد بعدي اكبر مستطيل يوضع داخل نصف دائرة نصف قطرها $4\sqrt{2}cm$

نفرض طول المستطيل =2x

نفرض عرض المستطيل =y



$$A = 2xy \dots\dots 1$$

$$x^2 + y^2 = \left(4\sqrt{2}\right)^2$$

$$x^2 + y^2 = 32 \rightarrow x^2 = 32 - y^2$$

$x = \sqrt{32 - y^2} \dots\dots\dots (2)$ نعوض 2 في 1

$$A = 2\sqrt{32 - y^2} \quad y = 2\sqrt{32y^2 - y^4} A' = 2\frac{64y - 4y^3}{2\sqrt{32y^2 - y^4}} = A' = 0$$

$$\frac{64y - 4y^3}{\sqrt{32y^2 - y^4}} = 0 \rightarrow [(64y - 4y^3 = 0)] \div 4 \rightarrow 16y - y^3 = 0$$

$y(16-y^2)=0$ اما $y=0$ (يهمل)

او $16-y^2=0 \rightarrow 16=y^2 \rightarrow y=4$ العرض

نعوض في 2

$x=\sqrt{32-16}=\sqrt{16}=4 \rightarrow 2x=2(4)=8$ الطول

ملاحظة / نصف قطر الدائرة او الكرة نرسمه من المركز الى نقطة التقاء البعدين مع محيطها

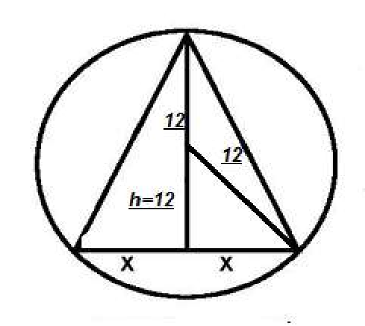
مثال /جد بعدي اكبر مثلث متساوي الساقين يمكن وضعه داخل دائرة نصف قطرها 12cm ثم بين ان نسبة مساحة المثلث الى مساحة الدائرة كنسبة $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$

نفرض طول القاعدة = 2x

نفرض الارتفاع =h

$$A=\frac{1}{2}(2X)h$$

$$A=x\times h \ldots\ldots\ldots 1$$



بتطبيق فيثاغورس $x^2+(h-12)^2=12^2$

$$x^2+h^2-24h+144=144$$

$$x^2=24h-h^2 \rightarrow x=\sqrt{24h-h^2} \ldots\ldots\ldots 2$$

$$A=\sqrt{24h-h^2}\times h \quad \rightarrow A=\sqrt{24h^3-h^4}$$

$$A'=\frac{72h^2-4h^3}{2\sqrt{24h^3-h^4}} \quad , \quad A'=0$$

$$\frac{72h^2-4h^3}{2\sqrt{24h^3-h^4}}=0 \rightarrow (72h^2-4h^4)=0 \div 4 \rightarrow 18h^2-h^3=0$$

$h^2(18-h)=0 \rightarrow h^2=0 \rightarrow h=0$ (يهمل)

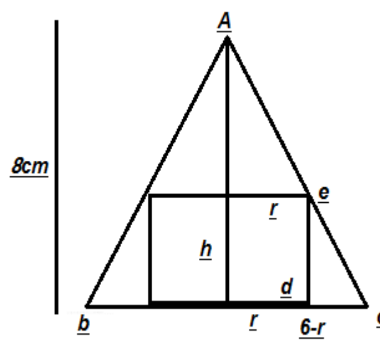
او $18-h=0 \rightarrow h=18$

$$x=\sqrt{24(18)-(18)^2}=\sqrt{423-324}=\sqrt{108}=\sqrt{36.3}=6\sqrt{3}$$



$$\frac{\text{مساحة المثلث}}{\text{مساحة الدائرة}} = \frac{x.h}{\pi r^2} = \frac{(6\sqrt{3})(18)}{\pi(12)(12)} = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$$

مثال / جد ابعاد اكبر اسطوانة دائرية قائمة توضع داخل مخروط دائري قائم ارتفاعه 8 cm وطول قطر قاعدته يساوي 12cm.



نفرض نصف قطر قاعدة الاسطوانة =r

نفرض ارتفاع الاسطوانة =h

$$v = \pi r^2 h \ldots\ldots\ldots 1$$

$$6h = 48 - 8r \div 2 \rightarrow 3h = 24 - 4r \rightarrow h = \frac{24-4r}{3} \ldots\ldots\ldots 2$$

$$v = \pi r^2\left(\frac{24-4r}{3}\right) = \pi\left(\frac{24r^2-4r^3}{3}\right) \rightarrow v' = \pi\left(\frac{48r-12r^2}{3}\right), v' = 0$$

$$\left(\pi\left(\frac{48r-12r^2}{3}\right) = 0\right) \div \pi \rightarrow \frac{48r-12r^2}{3} = 0 \rightarrow (48r - 12r^2 = 0) \div 12$$

$4r - r^2 = 0 \rightarrow r(4-r) = 0$ اما $r = 0$ (تهمل)

او $4 - r = 0 \rightarrow r = 4$

$$\therefore h = \frac{24-4(4)}{3} = \frac{24-16}{3} = \frac{8}{3}$$

ملاحظة / عند وضع مستطيل داخل مثلث ليس متساويا لساقين وليس قائما لزاوية فان التشابه يكون بين مثلثين (الاصلي والصغير) الذي يشبه بالشكل

مثال \\ جد بعدي اكبر مستطيل يمكن رسمه داخل مثلث طول قاعدته 24cm وارتفاعه 18cm بحيث ان رأسين متجاورين من رؤوسه تقعان على القاعدة والرأسين الباقيين تقعان على ساقيه .

الحل :- نفرض طول x = ، نفرض عرض y =

$$A = x, y \ldots\ldots\ldots 1$$

من تشابه المثلثين ADE, ABC

$$\frac{24}{X} = \frac{18}{18-y} \rightarrow 18x = 432 - 24y \rightarrow x = \frac{432-24y}{18} \ldots\ldots\ldots 2$$

نعوض 2 في 1

$$A=\left(\frac{432-24Y}{18}\right).Y=\left(\frac{432y-24y^2}{18}\right)$$

$$A'=\frac{432-48y}{18}\quad ,A'=0$$

نعوض في 2 $\frac{432-48y}{18}=0\rightarrow 432-48y=0\rightarrow 432=48y\rightarrow y=\frac{432}{48}=9$

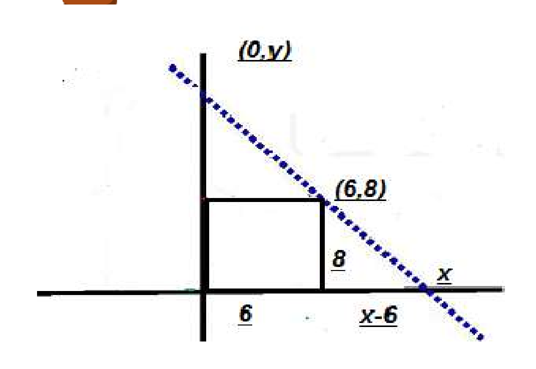
$$x=\frac{432-24(9)}{18}=\frac{432-216}{18}=\frac{216}{18}=12$$

ملاحظة / في المسائل التي فيها اشكال هندسية ورسومة داخل مثلث او مخروط تكون العلاقة الثانوية من تشابه المثلثين

مثال / جد معادلة المستقيم الذي يمر من النقطة (6,8)والذي يصنع مع المحور ين في الربع الاول اصغر مثلث


نفرض نقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات = (x,0)


نفرض نقطة تقاطع المستقيم مع محور الصادات =(0,Y)



$$A=\frac{1}{2}xy\ \dots\dots\dots 1$$

من تشابه المثلثين

$$\frac{x-6}{x}=\frac{8}{y}\rightarrow y(x-6)=8x\rightarrow y=\frac{8x}{x-6}\ \dots\dots\dots 2$$

نعوض 2 في 1

$$A=\frac{1}{2}x\frac{8x}{x-6}=\frac{4x^2}{x-6}$$

$$A'=\frac{(x-6).8x-4x^2(1)}{(x-6)^2}=\frac{8x^2-48x-4x^2}{(x-6)^2}=\frac{4x^2-48x}{(x-6)^2},A'=0$$

$$\frac{4x^2-48x}{(x-6)^2}=0\rightarrow 4x^2-48x=0\div 4\rightarrow x^2-12x=0$$



$\rightarrow x-12=0 \quad x=12 \rightarrow (12,0)$ نقطة التقاطع مع السينات

نعوض قيمة x في معادلة 2

$$y=\frac{8x}{x-6}=\frac{8(12)}{12-6}=\frac{8.12}{6}=16 \rightarrow (0,16)$$

معادلة المستقيم المار بالنقطتين p(12,0) p(6,8)

$$\frac{y-y1}{x-x2}=\frac{y2-y1}{x2-x1} \rightarrow \frac{y-8}{x-6}=\frac{0-8}{12-6}=\frac{y-8}{x-6}=-\frac{8}{6}$$

$$6y-48=-8x+48 \rightarrow 6y-48+8x-48=0$$

$(8x+6y-96=0)\div 2 \rightarrow 4x+3y-48=0$ ميل المستقيم

مثال/ علبة اسطوانية الشكل مفتوحة من الاعلى سعتها $125\pi cm^3$ جد ابعادها عندما يكون مساحة المعدن المستخدم في صنعها اقل ما يمكن

نفرض نصف قطر القاعدة =r

نفرض ارتفاع الاسطوانة =h

$$A=A(\text{جانبية})+A(\text{قاعدة واحدة})$$

$$A=(2\pi r).h+r^2\pi \ldots\ldots\ldots 1$$

$$v=\pi r^2 h$$

$$125\pi=\pi r^2 h \rightarrow 125=r^2 h \rightarrow h=\frac{125}{r^2}\ldots\ldots\ldots 2$$

نعوض معادلة 2 في معادلة 1

$$A=2\pi r\left(\frac{125}{r^2}\right)+\pi r^2$$

$$A=\frac{250\pi}{r}+\pi r^2 \rightarrow A'=\frac{r(0)-250\pi(1)}{r^2}+2\pi r \;, \qquad A'=0$$

$$\left(\frac{-250\pi(1)}{r^2}+2\pi r=0\right).r^2 \rightarrow (-250\pi+2\pi r^3=0)\div 2\pi$$

$$-125+r^3=0 \rightarrow r^3=125 \rightarrow r=5\ (\text{نصف القطر})$$

نعوض في علاقة 2

$$h=\frac{125}{5^2}=\frac{125}{25}=5\ (\text{الارتفاع})$$

مثال /خزان على شكل متوازي سطوح المستطيلة طول قاعدته ضعف عرضها فاذا كانت مساحة المعدن المستخدم في صناعته $108\ cm^2$ جد ابعاد الخزان لكي يكون حجمه اكبر ما يمكن علما ان الخزان ذو غطاء كامل

نفرض العرض =x

طول القاعدة = 2x

نفرض الارتفاع =y

$$v=(2x)(x)h=2x^2h\ \ldots\ldots\ldots 1$$

$$A=A(\text{جانبية})+2A(\text{قاعدة})$$

$$A=2(2x+x)h+2(2x)(x)$$

$$108=2(3x)y+4x^2\rightarrow(108=6xy+4x^2)\div 2$$

$$54=3xy+2x^2\rightarrow 54-2x^2=3xy\rightarrow y=\frac{54-2x^2}{3x}\ \ldots\ldots\ldots 2$$

نعوض 2 في 1

$$v=2x^2\left(\frac{54-2x^2}{3x}\right)=\frac{108x-4x^3}{3}=v'=\frac{108-12x^2}{3}\ ,v'=0$$

$$(108-12x^2=0)\div 12\rightarrow 9-x^2=0\rightarrow x^2=9\rightarrow x=3(\text{العرض})$$

$$2x=2(3)=6\ \ (\text{الطول})$$

نعوض قيمة x في معادلة 2

$$y=\frac{54-2(9)}{3(3)}=\frac{54-18}{9}=\frac{36}{9}=4\ (\text{الارتفاع})$$



واجبات

س1:-وزاري:-اذا كان y+4x=24 فجد قيمتي x,y التي تجعل yx^2 اكبر مايمكن ؟

س2:-وزاري:-مخروط دائري نصف قطر قاعدته 4cm وارتفاعه 12cm يراد قطع مخروط دائري قائم منه يرتكز راسه في مركز قاعده المخروط الاصلي وقاعدته توازي قاعده المخروط الاصلي , جد ابعاد المخروط المقطوع بحيث يكون حجمه اكبر مايمكن؟

س3:-وزاري:-جد ابعاد اسطوانه دائريه قائمه توضع داخل مخروط دائري قائم ارتفاعه 6cm وطول قطر قاعدته 8cm؟

س4:-وزاري:-جد مساحه اكبر مستطيل يوضع داخل نصف دائره نصف قطرها 8cm ؟

س5:-وزاري:-جد بعدي اكبر اسطوانه دائريه قائمه يمكن وضعها داخل كره مجوفه نصف قطرها $2\sqrt{3}cm$؟

س6:-وزاري:-جد نقطه تنتمي للقطع الزائد $y^2 - x^2 = 5$ بحيث تكون اقرب مايمكن للنقطه (4,0) ؟

س7:-وزاري:-لتكن $y^2 = 8x$ جد نقطه تنتمي للمنحني وتكون اقرب مايمكن للنقطه (6,0)

س8:-وزاري:-خزان من الحديد ذو غطاء كامل على شكل متوازي السطوح المستطيله قاعدته مربعه وحجمه 216 جد ابعاده لتكون مساحه الصفائح المستحدمه في صنعه اقل مايمكن ؟

س9:- وزاري:- جد بعدي علبه على شكل اسطوانه دائريه قائمه مسدوده من نهايتها مساحتها السطحيه $24\pi cm^2$ عندما يكون حجمها اكبر مايمكن ؟

س10:-وزاري:-جد ابعاد مستطيل محيطه 100cm ومساحته اكبر مايمكن ؟

تم بحمد الله الجزء الاول

اعداد الاستاذ حمزه حازم الكربلائي

07828808092

الخصوصي في

الرياضيات

الفصل الرابع



اعداد الاستاذ :

حمزة حازم الكربلائي

للصف السادس العلمي

بفرعيه الاحيائي والتطبيقي



0782 8808 092

التكامل

المجاميع العليا والسفلى(للتطبيقي)

السؤال شلون يجي بالامتحان (جد المجموع الاسفل والمجموع الاعلى) (اوجد)

$L(\sigma,f)$ تعني الاسفل و $U(\sigma,f)$ تعني الاعلى)

طريقه الحل حسب الجدول

الفترات	h	m	m	himi	hiMi

الفترات: هاي شلون طلعها وشكم فترة (حسب السؤال مرات يكلي ثلاث فترات جزئية يعني نجزاء 3 فترات او ينطي σ وبالامثلة تعرفها شنو

h: من هذا القانون انطلعه $h = \frac{b-a}{n}$

m: احنه راح نعوض قيم الفترات بالدالة اصغر قيمة تطلع هي هاي

M: احنه راح نعوض قيم الفترات بالدالة اكبر قيمة تطلع هي هاي

himi: حاصل ضرب h في m الرقم الاصغر

hiMi: حاصل ضرب h في M الرقم الاكبر

تذكر لمن درسك حق عليك فلا تبخل عليه بفرحة نجاحك

الاستاذ:- حمزة حازم الكربلائي

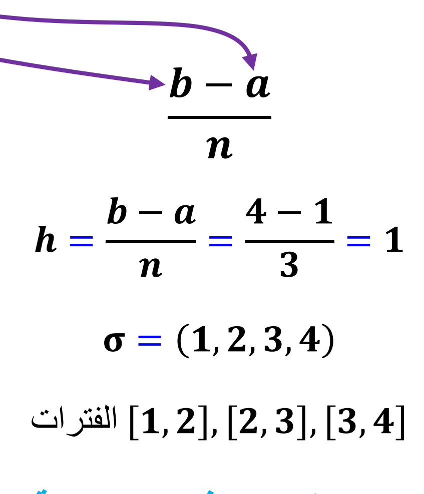




مثال/ لتكن $f:[1,4]\to R \quad , f(x)=5+2x$

جد المجموع الاسفل $L(\sigma,f)$ والمجموع الاعلى $U(\sigma,f)$ بثلاث تجزءات منتظمة

بكل سؤال نطلع h منين يطلع من الفترة الي منطيها من هاي ونطبق عليها القانون $[1,4]$





$$\frac{b-a}{n}$$

$$h=\frac{b-a}{n}=\frac{4-1}{3}=1$$

$$\sigma=(1,2,3,4)$$

الفترات $[1,2],[2,3],[3,4]$

هو كالي 3 فترات جزئية

هسة خطوة مهمة هي مشتقة الدالة بكل سؤال علمود نطلع نقطة حرجة ونشوف النقطة الحرجة لي فترة تنتمي يصير عليها شغل الي هو تتعوض الفترة والرقم الي يطلع من المشتقة نعوضهم بالدالة وناخذ بس الرقم الاصغر والرقم الاكبر والباقي يهمل (تطبق بس ع الفترة الي طلع الرقم ينتمي الها)(الشرح ليس من ضمن الحل)

$$\acute{f}(x)=2 \neq 0$$

الدالة متزايدة

تهمل لان ما أكدر اساويها بالصفر دالة ثابتة

يعني بدون قيود تكمل حل

اصغر قيمة من عوضنه الفترة

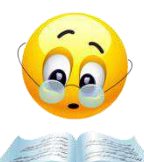
اكبر قيمة من عوضنه الفترة



الفترات	h	mi	Mi	himi	hiMi
[1,2]	1	mi=f(1)=5+2(1)=7	M=f(2)=5+2(2)=9	7	9
[2,3]	1	m=f(2)=5+2(2)=9	M2=f(3)=5+2(3)=11	9	11
[3,4]	1	M3=f(3)=5+2(3)=11	M3=f(4)=5+2(4)=13	11	13
				$L(\sigma, f) = \sum hm$ L=27	$U(\sigma, f) = \sum hM$ U=33

مجموع الارقام في هذا العمود يمثل المجموع الاسفل

مجموع الارقام في هذا العمود يمثل المجموع الاعلى



مثال/لتكن $f: [1,3] \to R$ حيث $f(x) = 2x^2$ جد القيمة التقريبية لـ f اذا قسمت الفترة [1,3] الى فترتين جزئيتين منتظمتين. (المثال اضافي)

نفس المثال الاول

$$h = \frac{b-a}{2} = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\therefore \ \sigma = (1, 2, 3)$$

الفترات $[1, 2], [2, 3]$

$$\acute{f}(x) = 4x = 0 \quad \therefore \ x = 0 \ \notin [1, 3]$$





الفترات	h	M	Mi	himi	hiMi
[1,2]	1	1	8	1	8
[2,3]	1	8	18	8	18
				$L=\sum himi$=9	U= $\sum hiMi$=26

قانون القيمة التقريبية

القيمة التقريبية لـ $f = \frac{L+U}{2} = \frac{9+26}{2} = \frac{35}{2} = 17\frac{1}{2}$

هسه نجي للامثلة اذ شتقينة وساوينة بالصفر طلع الرقم ينتمي لفترة شنو راح نسوي

مثال/ جد حاصل الجمع الاعلى وحاصل الجمع الادنى للدالة $f(x) = 9 - x^2$ على الفترة $[-2,3]$ للتجزئة $\sigma = (-2,-1,2,3)$ (المثال اضافي)

$\sigma = (-2,-1,2,3)$

الفترات $[-2,-1],[-1,2],[2,3]$

$\acute{f}(x) = -2x = 0 \quad \therefore x = 0 \in [-1,2]$

$f(-1) = 9 - (-1)^2 = 8$

$f(0) = 9 - 0 = 9 = M$

$f(2) = 9 - (2)^2 = 5 = m$



القيمة طلعت تنتمي للفترة (2,-1) لذلك يعوض الرقم والفترة وناخذ اكبر رقم واصغر رقم والي يبقة يروح هنا 1- راح تمام

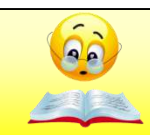
$+ + + + 0 - - - - - -$

الفترات	h	M	M	himi	hiMi
$[-2,-1]$	1	5	8	8	8
$[-1,2]$	3	5	9	15	27
$[2,3]$	1	0	5	0	5
				$L=\sum hm$=20	U= $\sum hM$=40

$L(\sigma,f) = 20$

$U(\sigma,f) = 40$

$$f \text{ القيمة التقريبية للدالة } = \frac{L + U}{2} = \frac{20 + 40}{2} = \frac{60}{2} = 30$$



مثال/ اذا كانت $f: [0, 4] \to R,\ f(x) = 3x - x^2$ اوجد كل من $L(\sigma, f), U(\sigma, f)$ مستخدما اربعة تجزئات منتظمة .



الحل/ نستخرج قيمة h بعدها الفترات



$$h = \frac{b - a}{n} = \frac{4 - 0}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$\sigma = (0, 1, 2, 3, 4)$$

الفترات[0,1] ,[1,2] ,[2,3] ,[3,4]

$$\acute{f}(x) = 3 - 2x = 0 \quad \therefore 2x = 3 \quad \therefore x = \frac{3}{2} \in [1, 2]$$

$$\therefore f(1) = 3(1) - 1^2 = 3 - 1 = 2 = m$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = 3\left(\frac{3}{2}\right) - (3/2)^2 = \frac{9}{2} - \frac{9}{4} = \frac{18 - 9}{4} = \frac{9}{4} = M$$

$$f(2) = 3(2) - 2^2 = 6 - 4 = 2$$

الفترات	h	m	M	himi	hiMi
[0,1]	1	0	2	0	2
[1,2]	1	2	$9/4$	2	9/4
[2,3]	1	0	2	0	2
[3,4]	1	-4	0	-4	0
				$L(\sigma, f) = \sum hm = -2$	$U(\sigma, f) = \sum hM = 6\left(\frac{1}{4}\right)$



التمارين الخاصة بالموضوع



س1/ اوجد كل من $\cup(\sigma,f)$,$L(\sigma,f)$ لكل مما يأتي

$1-f:[-2,1]\to R \quad , \quad f(x)=3-x$



a

$\sigma=(-2,0,1)$

الفترات$[-2,0],[0,1]$,$\acute{f}(x)=-1 \neq 0$

لا يوجد نقطة حرجة الدالة متناقصة (نشتغل بدون قيد او شرط)

الفترات	h	Mi	Mi	himi	hiMi
$[-2,0]$	2	3	5	6	10
$[0,1]$	1	2	3	2	3
				$L=\sum himi$=8	$\cup=\sum hiMi$=13

$L(\sigma,f)=8 \qquad \cup(\sigma,f)=13$



b:-

تقسيم الفترة [-2,1] الى ثلاث فترات منتظمة

الحل :-



$$h=\frac{b-a}{3}=\frac{1-(-2)}{3}=\frac{3}{3}=1$$

$$\sigma=(-2,-1,0,1)$$

الفترات $[-2,-1],[-1,0],[0,1]$,$\acute{f}(x)=-1\neq 0$



الدالة متناقصة

الفترات	h	Mi	Mi	Himi	hiMi
$[-2,-1]$	1	4	5	4	5
$[-1,0]$	1	3	4	3	4
$[0,1]$	1	2	3	2	3
				$L=\sum himi=9$	$\cup=\sum hiMi=12$

$$L(\sigma,f)=9$$

$$\cup(\sigma,f)=12$$

$2-f:[0,4]\to R \quad , \quad f(x)=4x-x^2$

اذا كانت $\sigma=(0,1,2,3,4)$

الحل:-





الفترات $[0,1],[1,2],[2,3],[3,4]$

$\acute{f}(x)=4-2x=0 \qquad \therefore \quad 2x=4$

$x=2$ حرجة $\in[2,3],[1,2]$

الفترات	h	Mi	Mi	himi	hiMi
$[0,1]$	1	0	3	0	3
$[1,2]$	1	3	4	3	4
$[2,3]$	1	3	4	3	4
$[3,4]$	1	0	3	0	3
				$L=\sum himi=6$	$\cup=\sum hiMi=14$

$L(\sigma,f)=6 \quad ,\cup(\sigma,f)=14$



$3 - f: [1,4] \to R \quad , \quad f(x) = 3x^2 + 2x$

a-



$\sigma = (1,2,4)$

الفترات $[1,2]$, $[2,4]$

$\acute{f}(x) = 6x + 2 = 0 \quad \therefore \; 6x = -2 \quad \therefore = \frac{-2}{6} = \frac{-1}{3} \nexists [1,4]$

الفترات	h	Mi	Mi	himi	hiMi
$[1,2]$	1	5	5	5	16
$[2,4]$	2	16	56	32	112
				$L = \sum himi$=37	∪= $\sum hiMi$=128

$L(\sigma, f) = 37, \cup(\sigma, f) = 128$

b- باستخدام ثلاث فترات جزئية منتظمة





استخدام ثلاث تجزئات متساوية : $f: [1,4] \to R$

$\therefore h = \frac{b-9}{3} = \frac{4-1}{3} = 1 \qquad f(x) = 3x^2 + 2x$

$\sigma = (1,2,3,4)$

الفترات $[1,2], [2,3], [3,4]$

$\acute{f}(x) = 6x + 2 = 0 \quad \therefore \; 6x = -2 \quad \therefore x = \frac{-2}{6} \notin [1,4]$

الفترات	h	Mi	Mi	himi	hiMi
$[1,2]$	1	5	16	5	16
[2,3]	11	16	33	16	33
[3,4]		33	56	33	56
				$L = \sum himi$=54	∪= $\sum hiMi$=105

$L(\sigma, f) = 54 \qquad \cup(\sigma, f) = 105$

تعريف التكامل

اذا كانت $f:[a,b]\rightarrow R$ دالة مستمرة على [a,b] فانه يوجد عدد وحيد K بحيث لاي تجزئة σ للفترة [a,b] فانه:-

$$L(\sigma,f)\leq k\leq U(\sigma,f)$$

ونسمي العدد K التكامل المحدد للدالة f ونرمز له $\int_a^b f$ وتقرأ تكامل الدالة f من a الى b وان a,b حدي التكامل.

ملاحظات

1- أذا كانت fدالة مستمرة على [a,b] فأن :-

$$L(\sigma,f)\leq\int_a^b f\leq U(\sigma,f)$$

$$\frac{L(\sigma,f)+U(\sigma,f)}{2}=\text{ و القيمة التقريبية للتكامل } \int_a^b f$$

2-أذا كانت $f(x)\geq 0\quad \forall x\in[a,b]$

فأن $\int_a^b f$ يعطي مساحة المنطقة تحت المنحني f وهو عدد غير سالب

3- أذا كانت $f(x)\leq 0\ ,\forall x\in[a,b]$

فأن $\int_a^b f\leq 0$

هذا لايدل على المساحه لذلك نخلي مطلق $|\int_a^b f|=$

الاستاذ حمزه الكربلائي

مثال:- لتكن $f:[1,3] \to R$ حيث $f(x) = x^2$ اوجد قيمة تقريبية للتكامل اذا جزئت الفترة $[1,3]$ الى تجزئتين . اي جد $\int_1^3 f$



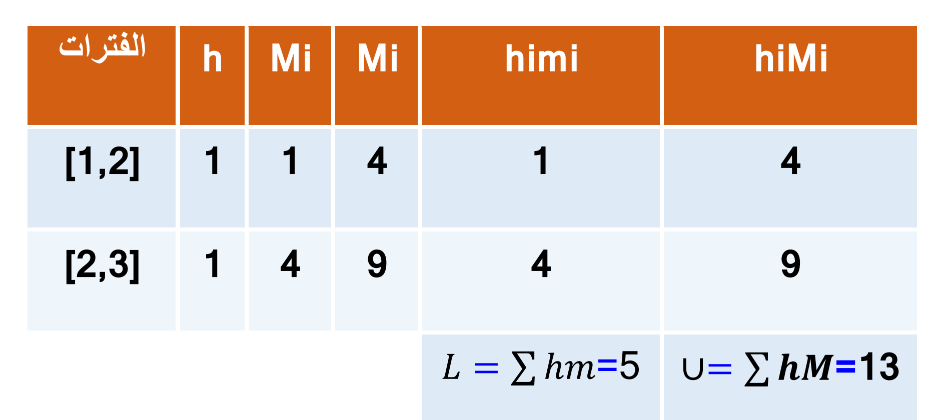
الحل:-

f دالة مستمرة على $[1,3]$

$$\sigma = (1,2,3)$$

الفترات $[1,2]$, $[2,3]$

$\acute{f}(x) = 2x = 0 \quad \therefore \quad x = 0$ حرجة $\notin [1,3]$



الفترات	h	Mi	Mi	himi	hiMi
[1,2]	1	1	4	1	4
[2,3]	1	4	9	4	9
				$L = \sum hm$=5	U= $\sum hM$=13

$$\therefore \quad L(\sigma, f) = 5$$

$$U(\sigma, f) = 13$$

$$\int_1^3 f = \int_1^3 f(x)dx = \frac{L(\sigma,f) + U(\sigma,f)}{2} = \frac{5+13}{2} = 9$$





مثال :- لتكن $f:[2,5] \to R$ حيث $f(x) = 2x - 3$ اوجد $\int_2^5 f(x)dx$

الحل:-



ط1

$$\sigma = (2,3,5)$$

الفترات $[2,3]$, $[3,5]$ $\quad$, $\acute{f}(x) = 2 \neq 0$ متزايدة

الفترات	h	Mi	Mi	himi	hiMi
[2,3]	1	1	3	1	3
[3,5]	2	3	7	6	14
				$L = \sum hm$=7	U= $\sum hM$=17

$$L(\sigma, f) = 7$$

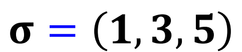
$$U(\sigma, f) = 17$$

$$\int_2^5 f = \frac{L + U}{2} = \frac{7+17}{2} = \frac{24}{2} = 12\ unit^2$$

ملاحظة:-بالدوال الثابتة او الدوال من الدرجة الاولى اذا مانطة تجزئة او ماذكر σ نختار اي تجزئه جانت



مثال :- لتكن $f(x) = 3$, $f: [1,5] \to R$ اوجد $\int_1^5 f(x)dx$



الحل:-



$$\sigma = (1, 3, 5)$$

الفترات $[1,3]$, $[3,5]$

$\acute{f}(x) = 0$ لا توجد حرجة

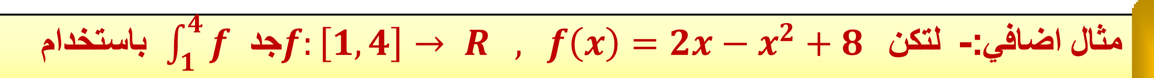
الفترات	h	mi	Mi	himi	hiMi
[2,3]	2	3	3	6	6
[3,5]	2	3	3	6	6
				$L = \sum hm$=12	U= $\sum h\ M$=12

$L(\sigma, f) = 12$ $U(\sigma, f) = 12$

$$\int_1^5 3dx = \frac{L + U}{2} = \frac{12+12}{2} = \frac{24}{2} = 12\ unit^2$$







مثال اضافي:- لتكن $f(x) = 2x - x^2 + 8 \quad , \quad f : [1,4] \to R$ جد $\int_1^4 f$ باستخدام $\sigma = (1,2,3,4)$



الفترات $[1,2]$, $[2,3]$, $[3,4]$

$\acute{f}(x) = 2 - 2x = 0 \quad \therefore \quad 2x = 2 \quad \therefore x = 1$ حرجة $\in [1,2]$

الفترات	h	mi	Mi	himi	hiMi
[1,2]	1	8	9	8	9
[2,3]	1	5	8	5	8
[3,4]	1	0	5	0	5
				$L = \sum hm$=13	U=22

$L(\sigma, f) = 13 \quad \cup(\sigma, f) = 22$

$$\int_1^4 f = \frac{L + \cup}{2} = \frac{13 + 22}{2} = \frac{35}{2} = 17\frac{1}{2}$$

التمارين الخاصة بالموضوع



1- اوجد قيمة تقريبية للتكامل $\int_1^3 \frac{3}{x} dx$ باستخدام التجزئة $\sigma = (1,2,3)$

الحل:-



التجزئة $\sigma = (1,2,3)$

$f(x) = 3x^{-1}$, الفترات $[1,2]$, $[2,3]$

الدالة متناقصة في مجالها $\acute{f}(x) = -3x^{-2} = \frac{-3}{x^2} \neq 0$

الفترات	h	mi	Mi	himi	hiMi
[1,2]	1	3/2	3	3/2	3
[2,3]	1	1	3/2	1	3/2
				L =3/2+1=(3+2)/2=5/2	U= 3 +3/2=(6+3)/2=9/2

$$L(\sigma, f) = \frac{5}{2} \quad U(\sigma, f) = \frac{9}{2}$$

$$\int_1^3 \frac{3}{x} dx = \frac{L+U}{2} = \frac{\left(\frac{5}{2}\right) + \frac{9}{2}}{2} = \frac{\frac{14}{2}}{2} = \frac{7}{2}$$



2- لتكن $f(x) = 3x - x$, $f:[1,4] \to R$ اوجد قيمة التكامل $\int_1^4 f(x)dx$ باستخدام التجزئة $\sigma = (1,2,3,4)$. ثم تحقق هندسيا بحساب المنطقة تحت منحني f.

الحل:-



الفترات الجزئية $[1,2]$, $[2,3]$, $[3,4]$

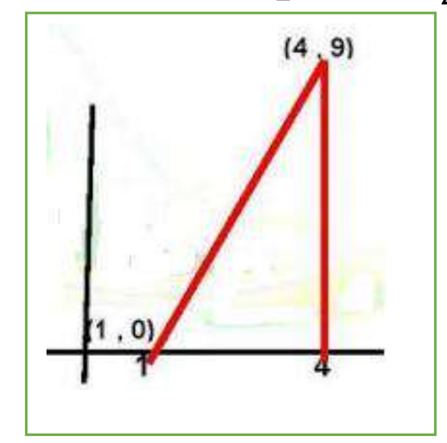
الدالة متزايدة $\acute{f}(x) = 3 \neq 0$



الفترات	h	mi	Mi	himi	hiMi
[1,2]	1	0	3	0	3
[2,3]	1	3	6	3	6
[3,4]	1	6	9	6	9
				$L=\sum himi=9$	$U=\sum hiMi=18$

$$L(\sigma,f)=9 \qquad U(\sigma,f)=18$$

$$\int_1^4 f=\frac{(L+U)}{2}=\frac{9+18}{2}=\frac{27}{2}=13.5 \quad unit^2$$



التحقق هندسيا

$$A=\frac{1}{2}(\text{القاعدة})(\text{الارتفاع})$$

$$=\frac{1}{2}(4-1)(9)$$

$$A=\frac{27}{2} \quad unit^2$$

ملاحظة:- نكدر نتحقق هندسيا باستخدام القانون

$$A=\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}*(b-a)\right)$$

حاول ان تحل بنفسك



-3 اوجد قيمة التكامل $\int_2^4 (3x^2-3)dx$ باستخدام التجزئة $\sigma = (2,3,4)$.

التجزئة $\sigma = (2,3,4)$ الفترات $[2,3]$, $[3,4]$

$\acute{f}(x) = 6x = 0 \quad \therefore \quad x = 0$ حرجة $\notin [2,4]$ متزايدة ضمن الفترة

الفترات	h	mi	Mi	himi	hiMi
[2,3]	1	9	24	9	24
[3,4]	1	24	45	24	45
				$L = \sum$ himi=33	U=69

$L(\sigma, f) = 33 \qquad U(\sigma, f) = 69$

$$\therefore \int_2^4 (3x^2-3)dx = \frac{L+U}{2} = \frac{33+69}{2} = \frac{102}{2} = 51$$



-4 اوجد قيمة التكامل $\int_{-3}^{2} f(x)dx$ حيث $f(x) = -4$.

الحل:-



$\sigma = (-3,-1,1,2)$

الفترات $[-3,-1]$, $[-1,1]$, $[1,2]$

$\acute{f}(x) = 0$ لا توجد حرجة

الفترات	h	mi	Mi	himi	hiMi
$[-3,-1]$	2	-4	-4	-8	-8
$[-1,1]$	2	-4	-4	-8	-8
$[1,2]$	1	-4	-4	-4	-4
				$L = \sum himi = -20$	$U = \sum hiMi = -20$



$L(\sigma, f) = -20 \qquad U(\sigma, f) = -20$

$$\int_{-3}^{2} f(x)dx = \frac{L+U}{2} = \frac{-20-20}{2} = \frac{-40}{2} = -20\ unit^2$$



5- اوجد قيمة تقريبية للتكامل $\int_1^5 x^3\,dx$ باستخدام اربعة تجزئات منتظمة.

الحل:-

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{5-1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

التجزئة $\sigma = (1, 2, 3, 4, 5)$

الفترات $[1,2], [2,3], [3,4], [4,5]$

$\acute{f}(x) = 3x^2 = 0 \quad \therefore \quad x^2 = 0 \quad \therefore \quad x = 0 \notin [1,5]$

$\acute{f}(x) = 3x^2 \geq 0$ الدالة متزايدة

الفترات	h	mi	Mi	himi	hiMi
[1,2]	1	1	8	1	8
[2,3]	1	8	27	8	27
[3,4]	1	27	64	27	64
[4,5]	1	64	125	64	125
				$L = \sum hm = 100$	$U = \sum hM = 224$

$L(\sigma, f) = 100 \qquad U(\sigma, f) = 224$

$$\int_{1}^{5} x^3\,dx = \frac{L+U}{2} = \frac{100+224}{2} = \frac{324}{2} = 162\ \ unit^2$$

تنبيه ((الى هنا ينتهي الموضوع الخاص بالتطبيقي والموضيع التي سوف تاتي للفرعين))

النظرية الاساسية للتكامل – النظرية المقابلة

هنا بالسؤال يكلك اثبت ان الدالة مقابلة الحال اكو دالتين دالة جبيرة و دالة صغيرة

1- تكامل الدالة الصغيرة لازم من تكامل ينطي نفس الدالة الجبيرة

2- نشتق الدالة الجبيرة لازم من تشتق ينطي نفس الدالة الصغيرة

اذا تحقق النقطتين معناه الدالة هي دالة مقابلة

مثال/ ليكن $f:[1,2]\to R \ , \ f(x)=2x$ ← داله صغيره

و $F:[1,2]\to R \ , \ F(x)=x^2$ ← داله جبيره

اثبت ان F دالة مقابلة لـ f

شلون عرفت الدالة الجبيرة من الدالة الصغير (من خلال رمز الدالة)



f دالة مستمرة على $[1,2]$

F دالة مستمرة على $[1,2]$

$\acute{F}(x)=2x=f(x)$

$\therefore$ F دالة مقابلة لـ f

مثال / اذا كانت f دالة مستمرة على $[1,5]$ بحيث ان $F(x)=3x^2$ دالة مقابلة للدالة f فجد $\int_1^5 f$



من يذكر بالسؤال هي دالة مقابلة الحل هو اعوض الحد الاعلى ـتعويض الحد الادنى ونطلع الناتج

الحل:-

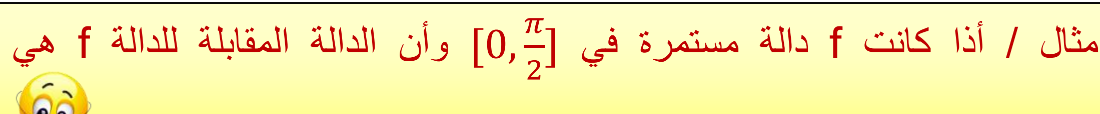


$\because$ F دالة مقابلة لـ f فان

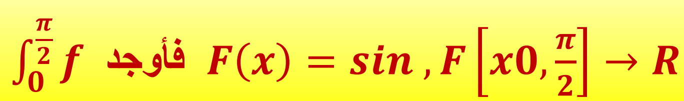
$$\int_1^5 f = F(5)-F(1)$$

$$=3(5)^2-3(1)^2=75-3=72$$





مثال / أذا كانت f دالة مستمرة في $[0,\frac{\pi}{2}]$ وأن الدالة المقابلة للدالة f هي



$F(x) = sin , F\left[x0,\frac{\pi}{2}\right] \to R$ فأوجد $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f$

الحل/ $F \because$ دالة مقابلة للدالة f



$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) = Sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - Sin0 = 1 - 0 = 1$$

مثال / أثبت فيما أذا كانت $F(x) = x^2 + 2$, $F:[1,3] \to R$ هي دالة مقابلة للدالة



$f(x) = 3x^2$

الحل /



$F \because$ دالة مستمرة على [1,3]



وf دالة مستمرة على [1,3]

$$F(x) = 3x^2 = f(\acute{x}) \qquad \forall x \in [1,3]$$

فأن F دالة مقابلة للدالة f على [1,3]

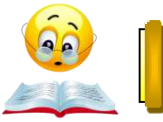


التكامل الغير محدد

ملاحظة1:- من انكامل اي دالة تكامل غير محدد نضع $+c$ (ثابت التكامل)

القاعدة الاولى / تكامل الثابت بس ضيف أله متغير حسب الدالة اذا دالة dx نضيف يم الثابت x اذا الدالة dy نضيف يم الثابت y

أمثلة :-



$\int K\,dx = Kx + c$ هو اي ثابت k

1. $\int 10dx = 10x + c$
2. $\int m\,dy = my + c$
3. $\int -5dx = -5x + c$
4. $\int \sqrt{7}dx = \sqrt{7}x + c$
5. $\int dx = x + c$
6. $\int (n^2+1)dx = (n^2+1)x + c$

القاعدة الثانية :- تكامل دالة مرفوعة الى قوة اسية يعني فوكاها اس اكبر من الواحد

شرط شلون انكامل (انضيف للاس واحد ونقسم على الاس الجديد)

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad n \neq -1$$

أمثلة :-



1. $\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + c$
2. $\int x dx = \frac{x^2}{2} + c$
3. $\int x^7\,dx = \frac{x^8}{8} + c$
4. $\int x^{-3}\,dx = \frac{x^{-2}}{-2} + c$



⑤ $\int x^{-2}dx = \frac{x^{-1}}{-1} + c$

⑥ $\int x^{-6}dx = \frac{x^{-5}}{-5} + c$

ملاحظة / اي ثابت يم التكامل نكدر نطلعة خارج التكامل

$$ex: \int 3x^4dx = 3\int x^4dx = 3\left(\frac{1}{5}x^5\right) + c = \frac{3}{5}\,x^5 + c$$

ملاحظة/ تكامل دالة جذرية ماكو نهائيا منا لنهاية الفصل لذلك اي دالة جذرية نحولها الى صورة اسية (اس الدالة على دليل الجذر) ونحل حسب القاعدة الاولى

أمثلة :-

① $\int \sqrt{x}dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$

② $\int \sqrt[3]{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{3}}\,dx = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}$

③ $\int \sqrt[3]{x^5}\,dx = \int x^{\frac{5}{3}}dx = \frac{x^{\frac{8}{3}}}{\frac{8}{3}} = \frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}} + c$

④ $\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \int x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{x} + c$

ملاحظة / تكامل دالة كسرية (نسبية) ماكو نهائيا لنهاية الفصل لذلك اي دالة كسرية نحلها (نرفع المقام للبسط ونغير اشارة الاس)

أمثلة :-

① $\int \frac{10}{x^5}dx = \int 10x^{-5}dx = \left(\frac{10x^{-4}}{-4}\right) + c = \frac{-5}{2x^4} + c$

② $\int \frac{3}{\sqrt{x}} dx = \int 3\,x^{-\frac{1}{2}} dx = 3\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + x = 6\sqrt{x} + C$

3- القاعدة الثالثة:- التكامل يتوزع على عملية الجمع والطرح يعني اذا عدنة دالة كثيرة حدود مجرد اوزع التكامل واكامل كل حد حسب قاعدته بس ميتوزع على الضرب والقسمة

ملاحظة/ اذ جان اكو قوس مرفوع الى قوة 2 فنربع القوس قبل التكامل

ملاحظة / اذ جان اكو قوسين بدون اس اضرب القوسين وبسطهم بعدها اكامل

ملاحظة/ وين متشوف تحليل تحلل(مهمة)

أمثلة :-



① $\int (x^2 + 3x - 1)dx = \int x^2 dx + \int 3x dx - \int dx = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - x + c$

② $\int (x^3 - 2x^{-2} + x - 10)dx = \frac{x^4}{4} - \frac{2}{x} + \frac{x^2}{2} - 10x + c$

نضرب الاقواس بعدها نكامل

③ $\int (x-1)(x^2+1)dx = \int (x^3 + x - x^2 - 1)dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - x + c$

④ $\int x^3(1-x)dx = \int (x^3 - x^4)dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} + c$

نحلل ونختصر ويه المقام

⑤ $\int \frac{x^2-1}{x-1} dx = \int \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} dx = \int (x+1)dx = \frac{x^2}{2} + x + c$

⑥ $\int \frac{x^2-5x+6}{x-2} dx = \int \frac{(x-2)(x-3)}{x-2} dx = \int (x-3)dx = \frac{x^2}{2} - 3x + c$



4-القاعدة الرابعة :- من تلكي (مشتقة داخل القوس)^{N}(القوس) الاس الي فوك القوس اكبر من 2

1- تهمل المشتقة

2- انضيف للاس 1 ونقسم على الاس الجديد

3- اذ المشتقة تحتاج توفرها (نوفرها نضربها بالمقدار 1 ويعبر عنه باشكال هواي مثلا 2/2 او 6/6)

أمثلة :-

1 $\int (1+3x^2)^5 x dx$

مشتقة الداخل 6 موجودة فلازم نوفرها فنضرب في 6/6

$$= \frac{1}{6}\int (1+3x^2)^5 * 6x dx = \frac{1}{6}.\frac{(1+3x^2)^5}{6} + c = \frac{1}{36}(1+3x^2)^6 + c$$

2 $\int (x^2+x+1)^{-3}.(2x+1)dx = \frac{(x^2+x+1)^{-2}}{-2} + c = -\frac{1}{2(x^2+x+1)^2} + c$

3 $\int \frac{3n+1}{\sqrt[3]{6n^2+4n+5}} dn = \int (6n^2+4n+5)^{-\frac{1}{3}}.(3n+1)dn$

مشتقة داخل القوس

12n+4

4(3n+1)

$$= \frac{1}{4}\int (6n^2+4n+5)^{-\frac{1}{3}}.4(3n+1)\, dn$$

$$= \frac{\frac{1}{4}(6n^2+4n+5)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + c = \frac{3}{8}(6n^2+4n+5)^{\frac{2}{3}}$$

4 $\int \frac{\left(\sqrt[3]{x^2}+2\right)^3}{\sqrt[3]{x}} dx \int \left(x^{\frac{2}{3}}+2\right)^3 .x^{-\frac{1}{3}} dx$

مشتقة داخل القوس

$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$

$$= \frac{3}{2}\int \left(x^{\frac{2}{3}}+2\right)^3 .\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{1}{6}\left(x^{\frac{2}{3}}+2\right)^4 + c$$

مشتقة داخل القوس

$= 6x + 8$

$2(3x+4)$

5 $\int (3x^2+8x+5)^6(3x+4)dx$

$= \frac{1}{2}\int (3x^2+8x+5)^6 . 2(3x+4)dx$

$= \frac{1}{2} * \frac{(3x^2+8x+5)^7}{7} + c = \frac{(3x^2+8x+5)^7}{14} + c$

ملاحظة مهمة:- اذا جان عدنة دالة متكونة من ثلاث حدود ومشتقة الداخل مموجودة طريقه حل

$($جذر الثالث $\mp$ جذر الاول$)^2$

6 $\int \sqrt{x^2-6x+9}\,dx = \int \sqrt{(x-3)^2}\,dx = \int (x-3)dx = \frac{x^2}{2} - 3x + c$

7 $\int (5x^7+4x)^5 dx$

نطلع x عامل مشترك

ونوفر المشتقة

$= \int \left(x(5x^6+4)\right)^5 dx = \int x^5(5x^6+4)^5)dx$

$= \frac{1}{30}\int (5x^6+4)^5 . 30x^5 dx = \frac{1}{30} . \frac{(5x^6+4)^6}{6} + c = \frac{1}{180}(5x^6+4)^6 + c$

8 $\int \sqrt{x^2-10x+25}\,dx$

$= \int \sqrt{(x-5)^2}\,dx = \int (x-5)dx = \frac{x^2}{2} - 5x + c$

9 $\int \frac{x^4-8x}{x-2}dx = \int \frac{x(x^3-8)}{x-2}dx = \int \frac{x(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}dx$

$\int x(x^2+2x+4)dx = \int (x^3+2x^2+4x)dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{4x^2}{2}\right] + c$

$= \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 + c$



⑩ $$\int \frac{dx}{\sqrt[5]{x^2-14x+49}} = \int (x^2-14x+49)^{-\frac{1}{5}}dx = \int [(x-7)^2]^{-\frac{1}{5}}$$

$$= \int (x-7)^{-\frac{2}{5}}dx = \frac{(x-7)^{\frac{-2+5}{5}}}{\frac{-2+5}{5}} = \frac{(x-7)^{\frac{3}{5}}}{\frac{3}{5}} + c = \frac{5}{3}(x-7)^{\frac{2}{5}} + c$$



مثال واجب :-احسب التكاملات الآتية

① $\int (x^2-2x+5)dx$ ② $\int \left(\sqrt{x}-\frac{2}{x^3}\right)dx$ ③ $\int \left(x^5-\sqrt{2}x-\frac{3}{x^2}\right)dx$

④ $\int 6x^2(2x^3-6)^4dx$ ⑤ $\int x^3(x^4-2)^5dx$ ⑥ $\int (x^2+1)\sqrt{x^3+3x+1}dx$



تكامل الدوال المثلثية

1) $\int \sin ax\, dx = \frac{-1}{a} \cos ax + c$

2) $\int \cos ax\, dx = \frac{1}{a} \sin ax + c$

3) $\int \sec^2 ax\, dx = \frac{1}{a} \tan ax + c$

4) $\int \csc^2 ax\, dx = \frac{-1}{a} \cot ax + c$

5) $\int \sec ax \tan ax\, dx = \frac{1}{a} \sec ax + c$

6) $\int \csc ax \cot ax\, dx = \frac{-1}{a} \csc ax + c$

قوانين مهمه جدا

ملاحظة1/ قبل لا نكامل الدالة لازم نوفر مشتقة الزاوية او مرات تكون موجودة واذ جان اكو نقص نكمل نقصها



2- من اكامل الدالة تهمل مشتقة الزاوية والزاوية الاصلية تبقى نفسها

1. $\int \sin 3x dx = \frac{1}{3} \int \sin 3x . 3dx = -\frac{1}{3} \cos 3x + c$

2. $\int x\cos 6x^2 dx = \frac{1}{12} \int \cos 6x^2 . 12x dx = \frac{1}{12} \sin 6x^2 + c$

3. $\int \sin 13x dx = \frac{1}{13} \int \sin 13x . 13dx = -\frac{1}{13} \cos 13x + c$

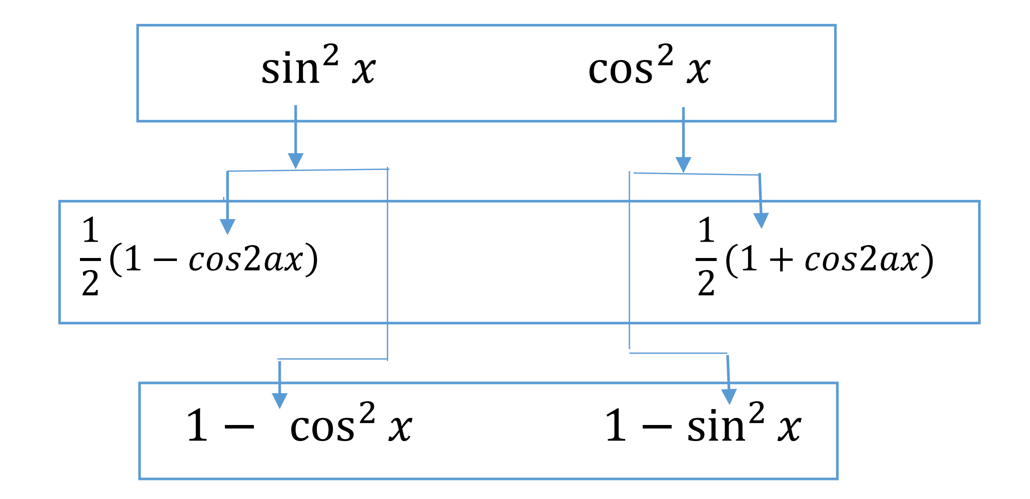
4. $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \int \sin x^{\frac{1}{2}} . x^{-\frac{1}{2}} dx = 2 \int \sin x^{\frac{1}{2}} . \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} dx = -2\cos\sqrt{x} + c$

5. $\int \frac{\cos\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \int \cos x^{\frac{1}{3}} . x^{-\frac{2}{3}} dx = 3 \int \cos x^{\frac{1}{3}} . x^{-\frac{2}{3}} dx = 3\sin\sqrt{x} + c$

6. $\int 4x^2 \cos x^3 dx = 4 \int \cos x^3 . x^2 dx = 4 * \frac{1}{3} \int \cos x^3 . 3x^2 dx = 4/3 \sin x^3$

ملخص لبعض الحالات التي سيرد شرحها

1)منكدر نكامل الدوال الدائرية المربعة عدا $(csc^2\ , sec^2)$ الا اذا استخدمنا القوانين التالية



2-اذا جان عندي حاصل ضرب دالتين لازم يتوفر شرطين علمود اكاملها حسب قاعدة (قوس مرفوع الى قوه) واذا ماتوفر الشرطين نطبق القوانين الفوك

a)لازم تكون الزويا مال الدالتين موحده

b)لازم تكون وحده من الدوال داخل قوس والثانية مشتقة داخل القوس



3- اذاجانت دالة cos,sin بالشكل $\sin^2 ax$ أو $\cos^2 ax$ من انكامل نعوض القانون وتكامل الدالة

$$1-\sin^2 ax = \frac{1}{2}(1-cos2ax)$$

$$2-\cos^2 ax = \frac{1}{2}(1+cos2ax)$$

① $\int \sin^2 2xdx = \int \frac{1}{2}(1-cos4x)dx = \frac{1}{1}\int 1dx - \frac{1}{2}\int cos4xdx$

$= \frac{1}{2}\int 1dx - \frac{1}{2}.\frac{1}{4}\int cos4x.4dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}sin4x + c$

② $\int \cos^2 5xdx = \int \frac{1}{2}(1+cos10x)dx = \frac{1}{2}\int 1dx + \frac{1}{2}\int cos10xdx$

$$=\frac{1}{2}\int 1dx+\frac{1}{2}.\frac{1}{10}\int cos10x.10dx=\frac{1}{2}x+\frac{1}{20}sin10x+c$$

3 $$\int \sin^2 7x\,dx=\int\frac{1}{2}(1-cos14x)dx=\frac{1}{2}\int 1dx-\frac{1}{2}\int cos14dx$$

$$=\frac{1}{2}\int 1dx-\frac{1}{2}.\frac{1}{14}\int cos14x\,.14dx=\frac{1}{2}x-\frac{1}{28}sin14x+c$$

4 $$\int \cos^2 10xdx=\frac{1}{2}(1+cos20x)dx=\frac{1}{2}\int 1dx+\frac{1}{2}\int cos20dx$$

$$=\frac{1}{2}\int 1dx+\frac{1}{2}.\frac{1}{20}\int cos20x.20dx=\frac{1}{2}x+\frac{1}{40}sin20x+c$$



4- أذا جانت sin مضروبة بدالة cos وبالشكل cosaxsinax وجاون واحد مرفوع الى أس والثاني مرفوع معناه الي مرفوع الى اس يمثل مشتقة الدالة المرفوعة

1 $$\int \sin^3 2x\ cos2xdx=\int (sin2x)^3cos2xdx$$

مشتقة داخل القوس

2cos2x

$$=\frac{1}{2}\int (sin2x)^3.2cos2xdx=\frac{1}{8}\sin^4 2x+c$$

2 $$\int sin5x\,.\cos^4 5xdx=\int (cos5x)^5.sin5xdx$$

مشتقة داخل القوس

-5sin5x

$$=\frac{1}{5}\int (cos5x)^5*-5sin5xdx=-\frac{1}{30}\cos^6 5x+c$$

تذكر

$$sin2x=2sinxcosx$$

$$sin2ax=2sinax.cosax$$

نستخدم هذا القانون اذا جانت الزوايا غير موحده (علمود نوحد الزوايا ونكامل)

1 $$\int 2sin2x\ cosxdx=2\int sinx\ cosxdx=2*-1\int (cosx)^2*-sinxdx$$

مشتقة داخل القوس -sinx

$$=-2.\frac{(cosx)^3}{3}+c=-\frac{2}{3}\cos^3 x+c$$

2 $$\int cos2x.sin4xdx=\int 2sin2xcos2xcos2x$$

$$= -2 * -\frac{1}{2}\int (cos2x)^2 * -2sin2xdx = -\frac{(cos2x)^3}{3} + c$$

تذكر

$$cos2x = 2\cos^2 x - 1$$

$$cos2ax = 2\cos^2 ax - 1$$

نستخدم هذا القانون اذا جانت الزوايا غير موحده (علموود نوحد الزوايا ونكامل)

1. $$\int cos6xsin3xdx = \int (2\cos^2 3x - 1)(sin3x)dx$$

$$= 2\int (cos3x)^2\, sin3xdx - \int sin3xdx$$

$$= 2 * -\frac{1}{3}\int (cos3x)^2 * -3sin3xdx - \frac{1}{3}\int sin3x.3dx$$

$$= -\frac{2}{3}.\frac{(cos3x)^3}{3} + \frac{1}{3}cos3x + c = -\frac{2}{9}\cos^3 3x + \frac{1}{3}cos3x + c$$

2. $$\int cos10x\, sin5x = \int (2\cos^2 5x - 1)sin5xdx$$

$$= 2\int (cos5x)^2 sin5xdx - \int sin5xdx$$

$$= 2 * -\frac{1}{5}\int (cos5x)^2 * -5sin5xdx - \frac{1}{5}\int sin5x.5dx$$

$$= -\frac{2}{5}.\frac{(cosx)^3}{3} + \frac{1}{5}cos5x + c = -\frac{2}{15}\cos^3 5x + \frac{1}{5}cos5x + c$$



5- أذا جانت الدالة $\sin^n x$ أو $\cos^n x$ و(n عدد فردي) نجزء الدالة ونطبق القوانين :-

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

1. $$\int \sin^3 2xdx = \int \sin^2 2x.sin2xdx = \int (1 - \cos^2 2x).sin2xdx$$

$$= \int sin2xdx - \int (cos2x)^2.sin2xdx$$

$$= \frac{1}{2}\int sin2x.2dx - \frac{-1}{2}\int (cos2x)^2.-2sin2xdx = -\frac{1}{2}cos2x + \frac{1}{2}.\frac{(cos2x)^3}{3}$$

$$= -\frac{1}{2}cos2x + \frac{1}{6}\cos^3 2x + c$$

② $\int \cos^3 3xdx = \int \cos^2 3x.cos3xdx = \int (1 - \sin^2 3x)cos3xdx$

$$= \int cos3xdx - \int (sin3x)^2.cos3xdx$$

$$= \frac{1}{3}\int cos3x.3dx - \frac{1}{3}\int (sin3x)^2.3cos3xdx$$

6- أذا جانت دالة sin أو cos مرفوعة الى (أس زوجي) نستخدم قانون النصف بعد ما نجزء الاسس

$$\sin^2 ax = \frac{1}{2}(1 - cos2ax)$$

$$\cos^2 ax = \frac{1}{2}(1 + cos2ax)$$

① $\int \sin^4 2xdx = \int (\sin^2 2x)^2 dx = \int \left(\frac{1}{2}(1 - cos4x)\right)^2 dx$

$$= \int \frac{1}{4}(1 - 2cos4x + \cos^2 4x)dx = \frac{1}{4}[\int 1 - 2\int cos4xdx + \int \cos^2 4x\, dx]$$

$$= \frac{1}{4}\int 1dx - \frac{1}{4}.2\int \cos 4xdx + \int cos\, 4xdx + \frac{1}{4}.\frac{1}{2}\int (1 + cos8x)dx$$

$$= \frac{1}{4}\int 1dx - \frac{1}{2}\int cos4xdx + \frac{1}{8}\int 1dx + \frac{1}{8}\int cos8xdx$$

$$= \frac{1}{4}\int 1dx - \frac{1}{2}.\frac{1}{4}\int cos4x.4dx + \frac{1}{8}\int 1dx + \frac{1}{8}.\frac{1}{8}\int cos8x.8dx$$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}sin4x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{64}sin8x + c$$



$$❷ \int \cos^4 x dx = \int (\cos^2 x)^2 dx = \int \left(\frac{1}{2}(1+cos2x)\right)^2$$

$$= \int \frac{1}{4}(1 + 2cos2x + \cos^2 2x)dx$$

$$= \frac{1}{4}\int 1dx + 2 * \frac{1}{4}\int cos2xdx + \frac{1}{4}\int \frac{1}{2}(1+cos4x)dx$$

$$= \frac{1}{4}\int 1dx + \frac{1}{2} * \frac{1}{2}\int cos2x.2dx + \frac{1}{8}\int 1dx + \frac{1}{8}.\frac{1}{4}\int cos4x.4dx$$

$$= \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}sin2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}sin4x + c$$

تذكر

$$\frac{1}{2}sin2x = sinxcosx$$

$$❶ \int \sin^2 2xcos^2 2xdx = \int (sin2xcos2x)^2 dx = \int \left(\frac{1}{2}sin4x\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \sin^2 4xdx = \frac{1}{4}.\frac{1}{2}\int (1 - cos8x)dx = \frac{1}{8}\int 1dx - \frac{1}{8}\int cos8xdx$$

$$= \frac{1}{8}\int 1dx - \frac{1}{8}.\frac{1}{8}\int cos8x.8dx = \frac{1}{8}x - \frac{1}{64}sin8x + c$$

تذكر

1-$\int \sec^2 x\,dx = tanx + c$ $\quad$ $2-\int \csc^2 x dx = -cotx + c$

3-$\int secx\,tanx\,dx = secx + c$ $\quad$ $4-\int cscx\,cotx\,dx = -cscx + c$

1. $\int \sec^2 3xdx = \frac{1}{3}\int \sec^2 3x\,dx = \frac{1}{3}tan3x + c$

2. $\int \sqrt{2}\csc^2 2xdx = \sqrt{2}.\frac{1}{2}\int \csc^2 2x.2dx = -\frac{\sqrt{2}}{2}cot2x + c$

3. $\int \frac{\sec^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = 2\int \sec^2 x^{\frac{1}{2}}.\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = 2tan\sqrt{x} + c$

4. $\int \frac{-3\csc^2\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x}}dx = -3.\frac{3}{2}\int \csc^2 x^2.\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}dx = -\frac{9}{2}.-cot\sqrt[3]{x^2} + c$

$= \frac{9}{2}cot\sqrt[3]{x^2} + c$

5. $\int xsec\,2x^2\tan 2x^2dx = \frac{1}{4}\int \sec 2x^2\tan 2x^2.4xdx = \frac{1}{4}\sec 2x^2 + c$

6. $\int \frac{\csc\sqrt{x}\,cot\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = 2\int \csc\,x^{\frac{1}{2}}\cot x^{\frac{1}{2}}.\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx = -2\,csc\sqrt{x} + c$

7. $\int \frac{sec\sqrt[3]{5x}tan\sqrt[3]{5x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx = \int sec\sqrt[3]{5}x^{\frac{1}{3}}\,tan\sqrt[3]{5}x^{\frac{1}{3}}.x^{-\frac{2}{3}}\,dx$

ملاحظة/ من يكون عندي $\tan^2 ax$ او $\cot^2 ax$ نطبق القوانين

$\tan^2 ax = \sec^2 ax - 1$

$\cot^2 ax = \csc^2 ax - 1$

1. $\int \tan^2 2x\,dx = \int(\sec^2 2x - 1)dx = \frac{1}{2}\int \sec^2 2x\,.2\,dx - \int 1dx$

$= \frac{1}{2}\tan 2x - x + c$



② $\int \cot^2 5x\, dx = \int (\csc^2 5x - 1)dx = \frac{1}{5}\int \csc^2 5x.5\, dx - \int 1dx$

$= -\frac{1}{5}\cot 5x - x + c$

③ $\int \frac{-3\tan^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = \int -3x^{-\frac{1}{2}}(\sec^2 x^{\frac{1}{2}} - 1)dx$

$= -3.2\int \sec^2 x^{\frac{1}{2}}.\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx + 3\int x^{-\frac{1}{2}}dx = -6\tan\sqrt{x} + 3\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c$

$= -6\tan\sqrt{x} + 6\sqrt{x} + c$

ملاحظه/ اذ جانت الدوال بهذا الشكل نطبق القاعده $\csc^2 ax \cot^n ax$ او $\sec^2 ax \tan^n ax$

القاعده

$$\int (\tan x)^n . \sec^2 x\, dx = \frac{(\tan x)^{n+1}}{n+1} + c$$

او $\int (\cot x)^n . \csc^2 x\, dx = \frac{-(\cot x)^{n+1}}{n+1} + c$

① $\int \tan^3 2x \sec^2 2x\, dx = \frac{1}{2}\int (\tan 2x)^3 . 2\sec^2 2x\, dx = \frac{1}{2}.\frac{\tan^4 2x}{4} + c$

② $\int 3\cot 3x \csc^2 3x\, dx = 3.-\frac{1}{2}\int (\cot 3x)^1 .-3\csc^2 3x\, dx = -\frac{\cot^2 3x}{2} + c$

التمارين الخاصة بالموضوع

① $\int \frac{(2x^2-3)^2-9}{x^2}dx = \int \frac{4x^4-12x^2+9-9}{x^2}dx = \int \frac{4x^4-12x^2}{x^2}dx = \int (4x^2 - 12)dx$

$= \frac{4x^3}{3} - 12x + c$

② $\int \frac{(3-\sqrt{5x})^7}{\sqrt{7x}}dx = \frac{1}{\sqrt{7}}\int \left(3-\sqrt{5}x^{\frac{1}{2}}\right)^7 x^{-\frac{1}{2}}dx$

$= \frac{1}{\sqrt{7}} \cdot -\frac{2}{\sqrt{5}}\int \left(3-\sqrt{5}x^{\frac{1}{2}}\right)^2 \cdot -\frac{\sqrt{5}}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx$

$= -\frac{2}{\sqrt{35}} \cdot \frac{\left(3-\sqrt{5}x^{\frac{1}{2}}\right)^8}{8} + c = -\frac{1}{4\sqrt{35}}(3-\sqrt{5x})^8 + c$

③ $\int \frac{\cos^3 x}{1-sinx}dx = \int \frac{\cos^2 x\, cosx}{1-sinx}dx = \int \frac{cosx(1-\sin^2 x)}{1-sinx}dx$

$= \int \frac{cosx(1-sinx)(1+sinx)}{1-sinx}dx = \int cosx\, dx + \int sinx\, cosx\, dx$

$= \int cosx\, dx + \int \frac{1}{2}sin2x\, dx = \int cosx\, dx + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int sin2x.2\, dx$

$= sinx - \frac{1}{4}cos2x + c$

④ $\int \csc^2 x\, cosx\, dx = \int \frac{1}{\sin^2 x}cosx\, dx = \int (sinx)^{-2}cosx\, dx$ ط1

$= \frac{(sinx)^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{sinx} + c = -cscx + c$

او $\int \frac{cosx}{\sin^2 x}dx = \int \frac{cosx}{sinx} - \frac{1}{sinx}dx = \int cosx.cscx\, dx = -cscx + c$ ط2

⑤ $\int \frac{x}{(3x^2+5)^4}dx = \frac{1}{6}\int (3x^2+5)^{-4}.6x\, dx = \frac{1}{6}\cdot\frac{(3x^2+5)^{-3}}{-3} + c$

$= -\frac{1}{18}(3x^2+5)^{-3} + c$

⑥ $\int \sqrt[3]{x^2+10x+25}dx = \int \sqrt[3]{(x+5)^2}dx = \int (x+5)^{\frac{2}{3}}dx$

$= \frac{(x+5)^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + c = \frac{3}{5}\sqrt[3]{(x+5)^5} + c$



⑦ $\int \sin^3 dx = \int sinx.\sin^2 dx = \int sinx(1 - cosx^2)dx$

$= \int sinx\, dx - (-1)\int (cosx)^2. -1sinx\, dx = -cosx + \frac{\cos^3 x}{3} + c$

⑧ $\int \frac{cos\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}}dx = -2\int cos(1-x)^{-\frac{1}{2}}. -\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}}dx = -2sin\sqrt{1-x} + c$

⑨ $\int (3x^2+1)^2 dx = \int (9x^4 + 6x^2 + 1)dx = \frac{9x^5}{5} + \frac{6x^3}{3} + x + c$

⑩ $\int \frac{\sqrt{x-\sqrt{x}}}{\sqrt[4]{x^3}}dx = \int \sqrt{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}.x^{-\frac{3}{4}}dx = \int (\sqrt{x}-1)^{\frac{1}{2}}.(x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}.x^{-\frac{3}{4}}dx$

$= 2\int \left(x^{\frac{1}{2}} - 1\right)^{\frac{1}{2}}.\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx = 2.\frac{(\sqrt{x}-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{4}{3}(\sqrt{x}-1)^{\frac{3}{2}} + c$

⑪ $\int (1 + cos3x)^2 dx = \int (1 + 2cos3x + \cos^2 3x)dx$

$= \int 1dx + 2\int cos3x\, dx + \frac{1}{2}\int (1 + cos6x)dx$

$= \int 1dx + 2\frac{1}{3}\int cos3x.3 - dx + \frac{1}{2}\int 1dx + \frac{1}{2}.\frac{1}{6}\int cos6x.6\, dx$

⑫ $\int \sec^2 4x\, dx = \frac{1}{4}\int \sec^2 4x\, dx = \frac{1}{4}tan4x + c$

⑬ $\int \csc^2 2xdx = \frac{1}{2}[-cot2x] + c = -\frac{1}{2}cot2x + c$

⑭ $\int \tan^2 8x\, dx = \int (\sec^2 8x - 1)dx = \frac{1}{8}\tan\, 8x - x + c$

⑮ $\int \frac{\sqrt{cot\, 2x}}{1 - cos^2 x}dx$

$= \int \frac{(cot2x)^{\frac{1}{2}}}{sin^2 x}dx = \int (cot2x)^{\frac{1}{2}}.\frac{1}{sin^2 x}dx = \int (cot2x)^{\frac{1}{2}}.csc^2 2xdx$

$$= -\frac{1}{2}\frac{(cot2x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$$

$$= -\frac{1}{2}.\frac{2}{3}(\cot\ 2x)^{\left(\frac{3}{2}\right)} + c = -\frac{1}{3}\sqrt{(cot2x)^3} + c$$

16 $\int \cos^2 2xdx = \int \frac{1}{2}(1 + cos4x)dx = \frac{1}{2}(x + \frac{1}{4}\sin 4x) + c$

17 $\int \sin^2 8xdx = \int \frac{1}{2}(1 - cos16x)dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{16}sin16x\right] + c$

18 $\int \cos^4 3x\, dx = \int (\cos^2 3x)^2\, dx = \int (\frac{1}{2}(1 + cos6x))^2 dx$

$$= \frac{1}{4}\int (1 + 2cos6x + \cos^2 6x)dx$$

$$= \frac{1}{4}\int 1dx + \frac{1}{4}.2\int cos6x\, dx + \frac{1}{4}\frac{1}{2}\int (1 + cos12x)dx$$

$$= \frac{1}{4}\int 1dx + \frac{1}{2}\frac{1}{6}\int cos6x.6\, dx + \frac{1}{8}\int 1dx + \frac{1}{8}.\frac{1}{12}\int cos12x.12\, dx$$

$$= \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}sin6x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{96}\sin 12x + c$$





التكامل المحدد

طلابي أذا ضبطت تكامل غير محدد يعني أنت ضبطت المحدد شلون؟ شوف هذا التكامل نفس القواعد والقوانين اطبقها اهنا زين شـنو الاختلاف، الاختلاف هنا اكو تعويض حد اعلى وحد ادنى الي همه نعوضهم بعد التكامل

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

1. $\int_1^2 5x^2 dx = [\frac{5x^3}{3}]_1^2 = \frac{5}{3}(2^3 - 1^3) = \frac{5}{3}(8-1) = \frac{35}{3}$

2. $\int_{-1}^3 (x^2 - 2x + 1)dx = [\frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + x]_{-1}^3 = \left[\frac{279}{3} - 9 + 3\right] - [-\frac{1}{3} - 1 - 1]$

$= 3 - \left(-\frac{1}{3} - \frac{2}{1}\right) = 3 - \frac{-1-6}{3} = 3 + \frac{7}{3} = \frac{9+7}{3} = \frac{16}{3}$

3. $\int_8^{\frac{\pi}{4}} sec^2 x\, dx$ واجب

تذكر مهم

$$\int_a^b (f1 \pm f2) = \int_a^b f1 \pm \int_a^b f2$$

مثال / اذا كانت $\int_1^3 f1 = 15$, $\int_1^3 f2 = 17$ فاوجد كلا من :-

1. $\int_1^3 (f1 + f2) = \int_1^3 f1 + \int_1^2 f2 = 15 + 17 = 32$

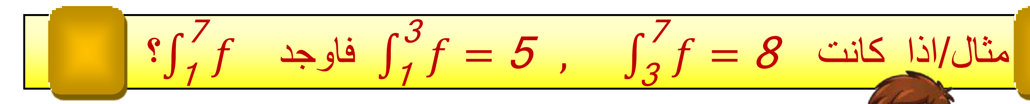
2. $\int_1^3 (f1 - f2) = \int_1^3 f1 - \int_1^3 f2 = 15 - 17 = -2$

مثال / اذا كانت $\int_2^5 f = 8$ فاوجد $\int_2^5 5f$ ؟

$$\int_2^5 5f = 5\int_2^5 f = 5 * 8 = 40$$

مثال/اذا كانت $f(x) = 3x^2 + 2x$ فاوجد $\int_1^2 f(x)dx$

$$\int_1^2 (3x^2 + 2x)dx = [\frac{3x^3}{3} + \frac{2x^2}{2}]_1^2 = (2^3 + 2^2) - (1^3 + 1^2) = (8 + 4) - (2)$$
$$= 12 - 2 = 10$$



مثال/اذا كانت $\int_3^7 f = 8$, $\int_1^3 f = 5$ فاوجد $\int_1^7 f$ ؟

$$\int_1^7 f = \int_1^3 f + \int_1^7 f = 5 + 8 = 13$$

تم الحل بالاعتماد على الخاصيه $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

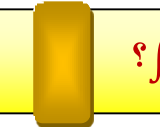
ملاحظة مهمه جدا :-

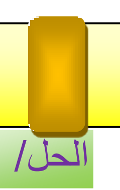
اذا انطاني بالسوال دالة مطلقه نساوي الدالة الي بداخل المطلق بالصفر نستخرج قيم x

#هذه القيم اذا جانت ماتنتمي للفتره المعطاة فما نجزء التكامل

#هذه القيم اذا جانت تنتمي للفتره المعطاة فنجزء التكامل

مثال /لتكن $f(x) = |x|$ فاوجد $\int_{-3}^4 f(x)dx$ ؟





الحل/

f مستمرة على [-3,4] :



$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & if\ x \geq 0 \\ -x & if\ x < 0 \end{cases}$$

$x=0$ $0 \in [-3,4]$

الفترات $[0,-3], [0,4]$

$$\therefore \int_{-3}^4 |x|dx = \int_{-3}^0 -x\,dx + \int_0^4 xdx = -\frac{x^2}{2}]_{-3}^0 + \frac{x^2}{2}]_0^4$$

$$= \left(0 - \left(-\frac{9}{2}\right)\right)^{-3} + \left(\frac{16}{2} - 0\right) = \frac{9}{2} + \frac{16}{2} = \frac{25}{2}$$



تذكر

① $\int_a^a f = 0$

② $\int_a^b f = -\int_b^a f$

① $\int_2^2 xdx = \frac{x^2}{2}]_2^2 = \frac{4}{2} - \frac{4}{2} = 0$

② $\int_3^2 3x^2dx = -\int_2^3 3x^2dx = -\frac{3x^3}{3}]_2^3 = -(27-8) = -19$

التمارين الخاصة بالموضوع



1- احسب كلا من التكاملات الاتية :-

A $\int_{-2}^{2}(3x-2)dx = \frac{3x^2}{2} - 2x]_{-2}^{2} = \left[\frac{3(2)^2}{2} - 2(2)\right] - \left[\frac{3(-2)^2}{2} - 2(-2)\right]$

$= (6-4) - (6+4) = 2 - 10 = -8$

B $\int_1^2(x^{-2} + 2x + 1)dx = [\frac{x^{-1}}{-1} + \frac{2x^2}{2} + x]_1^2 = [-\frac{1}{x} + x^2 + x]_1^2$

$= \left[-\frac{1}{2} + 4 + 2\right] - [-x + 1 + 1] = -\frac{1}{2} + 6 - 1 = -\frac{1}{2} + 5 = \frac{-1+5}{2} = \frac{9}{2}$

C $\int_1^3(x^4 + 4x)dx = \left[\frac{x^5}{5} + \frac{4x^2}{x}\right]_1^3 = \left[\frac{3^5}{5} + 2(3)^2\right] - \left[\frac{1^5}{5} + 2(1)^2\right]$

$= \left(\frac{243}{5} + 18\right) - \left(\frac{1}{5} + 2\right) = \frac{243+40}{5} - \frac{1+10}{5} = \frac{333-11}{5}$

D $\int_0^2|x-1|dx$

$|x-1| = \begin{cases} x-1 & \forall x-1 \geq 0 \quad \therefore \forall x \geq 1 \\ -x+1 & \forall x-1 < 0 \quad \therefore \forall x < 1 \end{cases}$

$\because \ 1 \in [0,2]$

$\therefore \int_0^2|x-1|dx = \int_0^1(-x+1)dx + \int_1^2(x-1)dx = [-\frac{x^2}{2} + x]_0^1 + [\frac{x^2}{2} - x]_1^2$

$= \left(-\frac{1}{2}+1\right) - 0 + \left(\frac{4}{2}-2\right) - \left(\frac{1}{2}-1\right) = -\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2}+1 = -1+1+1 = 1$

E $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}(x+\cos x)dx = \frac{x^2}{2}+\sin x]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} = (0+sin0) - \left(\frac{\frac{\pi^2}{2}}{2}+\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$

$= -\left(\frac{\pi^2}{8} - sin\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi^2}{8} + 1$

F $\int_{3}^{2}\frac{x^3-1}{x-1}dx = -\int_{2}^{3}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}dx = -[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x]_2^3$

$= \left[\left(\frac{27}{3}+\frac{9}{2}+3\right) - \left(\frac{8}{3}+\frac{4}{2}+2\right)\right] = -\left[\left(\frac{9}{2}+12\right) - \left(\frac{8}{3}+4\right)\right]$

$= -\left[\frac{9+24}{2} - \frac{8+12}{3}\right] = -\left(\frac{33}{2} - \frac{20}{3}\right) = -\frac{99-40}{6} = -\frac{59}{6}$

G $\int_{1}^{3}\frac{2x^3-4x^2+5}{x^2}dx = \int_1^3(2x-4+5x^{-2})dx = [\frac{2x^2}{2} - 4x + \frac{5x^{-1}}{-1}]_1^3$

$= \left[\left(9-12-\frac{5}{3}\right) - (1-4-5)\right] = \left[-3-\frac{5}{3}+8\right] = 5-\frac{5}{3} = \frac{15-5}{3}$

$= \frac{10}{3}$

2- اثبت ان F هي دالة مقابلة للدالة $f(x)$ حيث:-



$$F:\left[0,\frac{\pi}{6}\right] \to R \quad F(x) = sinx + x$$

$$f:\left[0,\frac{\pi}{6}\right] \to R \quad f(x) = 1 + cosx$$

ثم احسب $\int_0^{\frac{\pi}{6}} f(x)$

الحل:



$$F(x) = sinx + x$$

$$\acute{F}(x) = cosx + 1 = f(x)$$

$\therefore$F دالة مقابلة للدالة $f(x)$



$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{6}} f(x)dx = F(\frac{\pi}{6}) - F(0) = \left(sin\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) - (sin0 + 0) = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{6} - 0$$

$$= \frac{3+\pi}{6}$$

3- جد كلا من التكاملات الآتية:-



A $\int_1^4 (x-2)(x+1)^2 dx = \int_1^4 (x-2)(x^2+2x+1)dx$

$$= \int_1^4 (x^3 - 3x^2 + x - 2x^2 - 4x - 2)dx = \int_1^4 (x^3 - 3x - 2)dx$$

$$= [\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} - 2x]_1^4 = \left(\frac{256}{4} - \frac{48}{2} - 8\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2} - 2\right)$$

$$= (64 - 24 - 8) - \frac{1 - 5 - 8}{4} = 32 - \frac{13}{4} = 32 + \frac{13}{4} = \frac{128 + 13}{4} = \frac{141}{4}$$

B $\int_{-1}^1 |x+1| dx$

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & \forall x+1 \ge 0 \quad \therefore x \ge -1 \\ -x-1 & \forall x+1 < 0 \quad \therefore x < -1 \end{cases}$$

$\therefore \int_{-1}^{1}|x+1|dx = \int_{-1}^{1}(x+1)dx = \frac{x^2}{2}+x]_{-1}^{1}$

$= \left(\frac{1}{2}+1\right)-\left(\frac{1}{2}-1\right) = \frac{1}{2}+1-\frac{1}{2}+1 = 2$

C $\int_2^3 \frac{x^4-1}{x-1}dx = \int_2^3 \frac{(x^2-1)(x^2+1)}{x-1}dx = \int_2^3 \frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{x-1}dx$

$= \int_2^3 (x^3+x+x^2+1)dx = [\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+x]_2^3$

$= \left(\frac{81}{4}+\frac{9}{2}+\frac{27}{3}+3\right)-\left(\frac{16}{4}+\frac{4}{2}+\frac{8}{3}+2\right)^2$

$= \left(\frac{81}{4}+\frac{9}{2}+12\right)-\left(\frac{81}{4}+\frac{9}{2}+12\right)-\left(8+\frac{8}{3}\right) = \frac{81+18+48}{12}-\frac{24+8}{3}$

$= \frac{147}{4}-\frac{32}{3} = \frac{441-128}{12} = \frac{313}{12}$

D $\int_0^1 \sqrt{x}(\sqrt{x}+2)^2 dx = \int_0^1 \sqrt{x}(x+4\sqrt{x}+4)dx = \int_0^1 \left(x^{\frac{3}{2}}+4x+4x^{\frac{1}{2}}\right)dx$

$= \left[\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+\frac{4x^2}{2}+\frac{4x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = [\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+2x^2+\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}]_0^1$

$= \left(\frac{2}{5}(1)^{\frac{5}{2}}+2(1)^2+\frac{8}{3}1^{\frac{3}{2}}\right)-0 = \frac{2}{5}+\frac{2}{1}+\frac{8}{3} = \frac{6+30+40}{15} = \frac{76}{15}$



4- اذا كانت $f(x) = \begin{cases} 2x & \forall x \geq 3 \\ 6 & \forall x < 3 \end{cases}$ جد $\int_1^4 f(x)dx$

الحل:-



يجب ان نبرهن ان f مستمرة على [1,4]

$\because \quad 3 \in [1,4]$

1 $f(3) = 2(3) = 6$



② $\lim_{x\to+3} f(x) = \lim_{x\to+3}(2x) = 2(3) = 6 = L1$

$\lim_{x\to-3} f(x) = \lim_{x\to-3} 6 = 6 = L2$

$\because L1 = L2 = 6$ الغاية موجودة

③ $f(3) = \lim_{x\to3} f(x) = 6$

f مستمرة عند $x = 3$ و f مستمرة عند $x > 3$, $x < 3$

$\therefore$ f مستمرة في $[1,4]$

$\because\ 3 \in [1,4]$

$$\therefore \int_1^4 f(x)dx = \int_1^3 6dx + \int_3^4 2xdx = 6x]_1^3 + \frac{2x^2}{2}]_3^4$$

$$= (6(3) - 6(1) + (4^2 - 3^2) = 18 - 6 + 16 - 9 = 12 + 7 = 19$$



5- اذا كانت $f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \forall x \geq 0 \\ 2x & \forall x < 0 \end{cases}$ جد $\int_{-1}^{3} f(x)dx$

يجب ان نبرهن ان f مستمرة على $[-1,3]$ ويجب ان نثبت ان f مستمرة عند $x=0$

① $f(x) = 3(0)^2 = 0$

② $\lim_{x\to+0} f(x) = \lim_{x\to+0} 3(x^2) = 3(0)^2 = 0 = L1$

$\lim_{X\to-0} f(x) = \lim_{x\to-0} 2x = 2(0) = 0 = L2$

$\therefore L1 = L2 = 0$ الغاية موجودة

③ $f(0) = \lim_{x\to0} f(x) = 0$

.: الدالة مستمر $[-1,3]$ ومستمره عند $x=0$

$0 \in [-1,3]$

$$\therefore \int_{-1}^{3} f(x)dx = \int_{-1}^{0} 2x\,dx + \int_{0}^{3} 3x^2 dx = \frac{2x^2}{2}\Big]_{-1}^{0} + \frac{3x^3}{3}\Big]_{0}^{3}$$

$$= (0-1) + (27-0) = -1 + 27 = 26$$



اللوغارتم الطبيعي

نرمز اله بالرمز Ln

اللوغارتم الطبيعي بيه مشتقه وبي تكامل (هسة ناخذ المشتقة) حسب هاي القاعدة

معناها واحد على الدالة *مشتقة الدالة

$$y = \ln x \rightarrow \acute{y} = \frac{1}{x}$$



1. $y = \ln(3x^2) \rightarrow \acute{y} = \frac{1}{3x^2} . 6x = \frac{2}{x}$

2. $y = \ln(8x) \rightarrow \acute{y} = \frac{1}{8x} . 8 = \frac{1}{x}$

3. $y = \ln\sqrt{x} \rightarrow \acute{y} = \frac{1}{\sqrt{x}} . \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x}$

4. $y = ln\sqrt[3]{x^2} = lnx^{\frac{2}{3}} \rightarrow \acute{y} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} . \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3x^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}}}$

5. $y = \ln(x^2 + 5x - 10) \rightarrow \acute{y} = \frac{1}{x^2 + 5x - 10} . (2x + 5) = \frac{2x + 5}{x^2 + 5x - 10}$

6. $y = \ln(sin3x) \rightarrow \acute{y} = \frac{1}{sin3x} . 3cos3x = \frac{3coc3x}{sin3x} = 3cot3x$

7. $y = \sqrt[3]{lnx^2} = (lnx^2)^{\frac{1}{3}} \rightarrow \acute{y} = \frac{1}{3}(lnx^2)^{-\frac{2}{3}} . \frac{1}{x^2} . 2x = \frac{2}{3x\sqrt[3]{(lnx^2)^2}}$

8. $y = x + ln2x \rightarrow \acute{y} = 1 + \frac{1}{2x} . 2 = 1 + \frac{1}{x}$

خواص اللوغارتيم العشري

1. $lnxy = lnx + lny$

2. $\ln\frac{x}{y} = lnx - lny$

③ $lnx^n = n\ lnx$ ④ $ln1 = 0$

تكامل اللوغارتيم العشري

$$\int \frac{1}{x}dx = ln|x| + c$$

معناها اذا لكينة مشتقة المقام بالبسط مباشر تكاملها بالـln



① $\int \frac{1}{x+1}dx = ln|x+1| + c$

② $\int \frac{12x+2}{6x^2+2x-1}dx = ln|6x^2+2x-1| + c$ المشتقة موجودة

③ $\int \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}ln|x^2+1| + c$

④ $\int \frac{x^2}{x^3+6}dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{x^3+6}dx = \frac{1}{3}\ ln|x^3+6| + c$

⑤ $\int \frac{sinx}{1+cosx}dx = -\int -\frac{sinx}{1+cosx}dx = -ln|1+cosx| + c$

⑥ $\int \sec^2\frac{3x}{2+tan3x}dx = \frac{1}{3}\int \frac{3sec^2 3x}{2+tan3x}dx = \frac{1}{3}ln|2+tan3x| + c$

⑦ $\int secx\ dx = \int secx.\frac{secx+tanx}{secx+tanx}dx = \int \frac{sec^2 x + secx\ tanx}{tanx+secx}dx$

$= ln|tanx + secx| + c$

⑧ $\int cscx\ dx = \int cscx.\frac{cscx+cotx}{cscx+cotx}dx = -\int \frac{-(csc^2 x+cscx\ cotx}{cotx+cscx}dx$

$= ln|cotx + cscx| + c$



9 $\int sec3x\,dx = \int sec3x.\frac{sec3x + tan3x}{sec3x + tan3x}dx = \frac{1}{3}\int \frac{3(\sec^2 3x + sec3x\,tan3x)}{tan3x + sec3x}dx$

$= \frac{1}{3}ln|tan3x + sec3x| + c$

10 $\int csc5x\,dx = \int csc5x.\frac{csc5x+cot5x}{csc5x+cot5x}dx = -\frac{1}{5}\int \frac{-5(\csc^2 5x+csc5x\,cot5x)}{cot5x+csc5x}dx$

$= -\frac{1}{5}ln|cot5x + csc5x| + c$

$-\frac{1}{5}ln|cot5x + csc5x| + c$

الدالة الاسية e^x

مشتقة الدالة الاسية:-

$y = e^x \to \acute{y} = e^x.$ (مشتقة الاس)



امثلة/ جد مشتقة الدوال الاتية:-

1 $y = e^{3x} \to \acute{y} = e^{3x}.3 = 3e^{3x}$

2 $y = e^{\sqrt{x}} \to \acute{y} = e^{\sqrt{x}}.\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}$

3 $y = e^{x^2+2x+1} \to \acute{y} = e^{x^2+2x+1}.(2x + 2)$

4 $y = e^{sin2x} \to \acute{y} = e^{sin2x}.2cos2x$

5 $y = e^{secx} \to \acute{y} = e^{secx}.secx\,tanx$

6 $y = x^2.e^{x^2} \to \acute{y} = x^2.e^{x^2}.2x + e^{x^2}.2x = 2x^3e^{x^2} + 2xe^{x^2}$

7 $y = e^{tanx^2} \to \acute{y} = e^{tanx^2}.\sec^2 x^2.2x$

8 $y = ln3x^4.e^{8x^2} \to \acute{y} = ln3x^4.e^{8x^2}.16x + e^{8x^2}.\frac{1}{3x^4}.12x^2$

$= 16x.ln3x^4.e^{8x^2} + \frac{4e^{8x^2}}{x^2}$

تكامل الدالة الاسية

$$\int e^x dx = e^x + c$$

شرط اكو مشتقة الاس يالة تكدر تكاملها



1) $\int e^{2x} dx = \frac{1}{2}\int e^{2x}.2dx = \frac{1}{2}e^{2x} + c$

2) $\int e^{x^2-2x}.(x-1)dx = \frac{1}{2}\int e^{x^2-2x}.2(x-1)dx = \frac{1}{2}e^{x^2-2x} + c$

3) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int e^{x^{\frac{1}{2}}}.x^{\frac{1}{2}}dx = 2\int e^{x^{\frac{1}{2}}}.\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx = 2e^{\sqrt{x}} + c$

4) $\int (5+2e^{2x})dx = \int 5dx + \int e^{2x}.2dx = 5x + e^{2x} + c$

5) $\int e^{cos2x}.sin2xdx = -\frac{1}{2}\int e^{cos2x}.-2sin2x\,dx = -\frac{1}{2}e^{cos2x} + c$

6) $\int \frac{e^{tan5x}}{\cos^2 5x}dx = \int e^{tan5x}.\sec^2 5x\,dx = \frac{1}{5}\int e^{tan5x}.5\sec^2 5x\,dx$

$= \frac{1}{5}e^{tan5x} + c$

ملاحظة/ $\ln e^x = x \quad , \quad e^{\ln x} = x$

اذا جان عدنه عدد مرفوع الى دالة ويطلب مني مشتقة نستخدم القاعدة

$$y = a^u \rightarrow \acute{y} = a^u.\ln a.\frac{du}{dx}$$



أمثلة/ جد المشتقة:-

1. $y = 3^{2x-5} \rightarrow \acute{y} = 3^{2x-5}.ln3.(2) = 2ln3.3^{2x-5}$
2. $y = 2^{-x^2} \rightarrow \acute{y} = 2^{-x^2}.ln2.(-2x) = -2ln2.2^{-x^2}$
3. $y = 5^{sin2x} \rightarrow \acute{y} = 5^{sin2x}.ln5.(2cos2x)$
4. $y = 6^{4x} \rightarrow \acute{y} = 6^{4x}.ln6.(4) = 4ln6.6^{4x}$
5. $y = \sqrt{2^x} = (2^x)^{\frac{1}{2}} \rightarrow \acute{y} = \frac{1}{2}(2^x)^{\frac{1}{2}}.2^x ln2.(1) = \frac{2^x ln2}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} ln2}{2}$
6. $y = 9^{tanx^2} \rightarrow \acute{y} = 9^{tanx^2}.ln9.\sec^2 x^2.2x = 2xsec^2x^2.9^{tanx^2}ln9$

التمارين الخاصة بالموضوع



1- جد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما ياتي:-

A $y = ln3x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3x}.3 = \frac{1}{x}$$

B $y = \ln\left(\frac{x}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}x\right) = \frac{ln1}{2} + lnx$

$$\acute{y} = 0 + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}2$$

C $y = \ln(x^2)$

$$\acute{y} = \frac{1}{x^2}.2x = \frac{2}{x}$$

D $y = (\ln(x))^2 \rightarrow \acute{y} = 2(\ln(x)).\frac{1}{x} = \frac{2lnx}{x}$

E $y = \ln\left(\frac{1}{x}\right)^3 = \ln\frac{1}{x^3} = lnx^{-3}$

1ط $\acute{y} = \frac{1}{x^{-3}} . -3x^{-4} = x^{3}. -3x^{-4} = -3x^{-1} = -\frac{3}{x}$

2ط $y = -3lnx \quad \therefore \acute{y} = -3 . \frac{1}{x} = -\frac{3}{x}$

F $y = \ln(2 - cocx) \rightarrow \acute{y} = \frac{1}{2-cosx} . sinx = \frac{sinx}{2-cosx}$

G $y = e^{-5x^2+3x+5} \rightarrow \acute{y} = e^{-5x^2+3x+5} . (-10x + 3)$

H $y = 9^{\sqrt{x}} \rightarrow \acute{y} = 9 +^{\sqrt{x}} . ln9 . \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{ln9}{2\sqrt{x}} . 9^{\sqrt{x}}$

I $y = 7^{-\frac{x}{4}} = 7^{\left(-\frac{1}{4}\right)x} . ln7 . \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4} . 7^{\left(-\frac{1}{4}\right)x} . ln7$

j $y = x^2 . e^x \rightarrow \acute{y} = x^2 . e^x + e^x . 2x = xe^x(x + 2)$



2- جد التكاملات الاتية:-

A $\int_0^3 \frac{1}{x+1} dx = ln|x + 1|]_0^3 = ln|4| - ln1 = ln4 = ln2^2 = 2ln2$

B $\int_0^4 \frac{2x}{x^2+9} dx = ln|x^2 + 9|]_0^4 = ln|16 + 9| - ln|0 + 9| = ln25 - ln9$

$= ln5^2 - ln3^2 = 2ln5 - 2ln3 = 2(ln5 - ln3)$

C $\int_{ln3}^{ln5} e^{2x}\, dx = \frac{1}{2} \int_{ln3}^{ln5} e^{2x} . 2\, dx = \frac{1}{2} e^{2x}]_{ln3}^{ln5} = \frac{1}{2}[e^{2ln5} - e^{2ln3}]$

$= \frac{1}{2}[e^{ln5^2} - e^{ln3^2}] = \frac{1}{2}[25 - 9] = \frac{16}{2} = 8$

D $\int_0^{ln2} e^{-x}\, dx = -\int_0^{ln2} e^{-x} . -dx = -e^{-x}]_0^{ln2} == -\frac{1}{e^{ln2}} - \left(-\frac{1}{e^0}\right)$

$= -\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{1}\right) = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$



E $\int_0^1 (1+e^x)^2 \, . e^x dx$ مشتقة داخل القوس هي e^x موجودة

$= \frac{1+e^x}{3}]_0^1 = \frac{1}{3}\left((1+e^1)^3 - (1+e^0)\right)^3$

$= \frac{1}{3}\left((1+2)^3 - (1+1)\right)^3 = \frac{1}{3}((1+e)^3 - 8)$

F $\int_0^1 \frac{3x^2+4}{x^3+4x+1} dx = ln|x^3+4x+1|]_0^1$

$= ln|1^3+4(1)+1| - ln|0^3 4(0)+1| = ln6 - ln1 = ln6 - 0 = ln6$

G $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} dx = \int_1^4 e^{x^{\frac{1}{2}}} . \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} dx = e^{\sqrt{x}}]_1^4 = e^{\sqrt{4}} - e^{\sqrt{1}} = e^2 - e^1$

H $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 x}{2+tanx} dx = ln|2+tanx|]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$

$= ln\left|2+tan\frac{\pi}{4}\right| - ln\left|2+tan\frac{-\pi}{4}\right| = ln|2+1| - ln|2-1| = ln3 - ln1 = ln3$

i $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{cosx}{\sqrt{sinx}} dx$ مشتقة داخل الجذر $cosx$ موجودة

$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (sinx)^{-\frac{1}{2}} . cosx\, dx = \frac{(sinx)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\sqrt{sinx}]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\left(\sqrt{sin\frac{\pi}{2}} - \sqrt{sin\frac{\pi}{6}}\right)$

$= 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2 - \frac{2}{\sqrt{2}} = 2 - \sqrt{2}$

j $\int \cot^3 5x\, dx = \int \cot^2 5x\, cot5x\, dx = \int (\csc^2 5x - 1) cot5x\, dx$

$= \int \csc^2 5x\, cot5x\, dx - \int cot5x\, dx$

$= -\frac{1}{5}\int cot5x . -5 \csc^2 5x dx - \frac{1}{5}\int \frac{5. cos5x}{sin5x} dx$

$= \frac{1}{5}\frac{\cot^2 5x}{2} - \frac{1}{5} ln|sin5x| + c = -\frac{1}{10} cot^2 5x - \frac{1}{5} ln|sin5x| + c$

k $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{cosx}.sinx\,dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{cosx}.-sinx\,dx = -e^{cosx}]_0^{\frac{\pi}{2}} = -(e^{cos\frac{\pi}{2}} - e^{cos0})$

$= -(e^0 - e^1) = -(1-e) = e-1$

L $\int_1^2 xe^{-lnx}\,dx = \int_1^2 \frac{x}{e^{lnx}}dx = \int_1^2 \frac{x}{x}dx = \int_1^2 dx = x]_1^2 = 2-1 = 1$



3- اثبت ان :-

A $\int_1^8 \frac{\sqrt{\sqrt[3]{x}-1}}{\sqrt[3]{x}}dx = 2$

الحل: ناخذ الطرف الايسر $\int_1^8 \left(x^{\frac{1}{3}}-1\right)^{\frac{1}{2}}.x^{-\frac{2}{3}}dx = 3\int_1^8 \left(x^{\frac{1}{3}}-1\right)^{\frac{1}{2}}.\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}dx$





$= 3.\frac{(\sqrt[3]{x}-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}]_1^8 = 3.\frac{2}{3}(\sqrt[3]{x}-1)^{\frac{3}{2}}]_1^8 = 2[\sqrt[3]{8}-1)^{\frac{3}{2}}] - (\sqrt[3]{1}-1)^{\frac{3}{2}}]$

$= 2\left[1^{\frac{3}{2}} - 0^{\frac{3}{2}}\right] \quad \rightarrow \quad = 2$ الطرف الايمن

B $\int_{-2}^4 |3x-6|dx = 30$

الحل:

$|3x-6| = \begin{cases} 3x-6 \;\forall\, 3x-6\geq 0\;, & 3x\geq 6 \quad x\geq 2 \\ -3x+6 \;\forall\, 3x-6<0\;, & 3x<6 \quad x<2 \end{cases}$

$\because 2 \in [-2,5]$



$\int_{-2}^4 |3x-6|\,dx = \int_{-2}^2 (-3x+6)dx + \int_2^4 (3x-6)dx$

$= [-\frac{3x^2}{2}+6x]_{-2}^2 + [\frac{3x^2}{2}-6x]_2^4$

$= \left[\left(-\frac{3(2)^2}{2}+6(2)\right) - \left(-\frac{3(-2)^2}{2}+6(-2)\right)\right] + \left[\left(\frac{3(4)^2}{2}-6(4)\right) - \left(\frac{3(2)^2}{2}-6(2)\right)\right]$

$= \left[\left(-\frac{12}{2}+12\right) - \left(-\frac{12}{2}-12\right)\right] + \left[\left(\frac{48}{2}-24\right) - \left(\frac{12}{2}-12\right)\right]$

$= [6+18] + [0-(-6)] = 24+6 \quad \rightarrow \quad = 30$ الطرف الايمن





4- $f(x)$ دالة مستمرة على[-2,6] فاذا كانت $\int_1^6 f(x)dx = 6$ وكان $\int_{-2}^6 [f(x)+3]dx = 32$ فجد $\int_{-2}^1 f(x)dx$.

الحل:



$$\because \int_{-2}^6 [f(x)+3]dx = 32$$

$$\therefore \int_{-2}^6 f(x)dx + \int_{-2}^6 3dx = 32$$

$$\int_{-2}^6 f(x)dx = 32 - [3x]_{-2}^6 = 32 - [3(6) - 3(-2)]$$

$$\int_{-2}^6 f(x)dx = 32 - (18+6) = 32 - 24 = 8$$

$$\because \int_{-2}^6 f(x)dx = \int_{-2}^1 f(x)dx + \int_1^6 f(x)dx$$

$$8 = \int_{-2}^1 f(x)dx + 6 \rightarrow \int_{-2}^1 f(x)dx = 8 - 6 = 2$$



5- جد قيمة $a \in R$ اذا علمت ان $\int_1^a \left(x+\frac{1}{2}\right)dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x\, dx.$

الحل:



$$\int_1^a \left(x+\frac{1}{2}\right)dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x\, dx$$

$$\therefore \left[\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}x\right]_1^a = 2tanx]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$\left(\frac{a^2}{2}+\frac{1}{2}a\right) - \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(1)\right) = 2\left(tan\frac{\pi}{4} - tan0\right)$$

$$\frac{a^2}{2}+\frac{a}{2}-1 = 2 \rightarrow \frac{a^2}{2}+\frac{a}{2}-3 = 0 \quad * 3$$

$$a^2 + a - 6 = 0 \rightarrow (a+3)(a-2) = 0$$

$a+3=0 \quad \to a=-3$ اما

$a-2=0 \quad \to a=2$ او



-6 لتكن $f(x)=x^2+2x+k$ حيث $k \in R$ دالة نهايتها الصغرى تساوي (-5) فجد $\int_1^3 f(x)dx.$

الحل:

$\because$ للدالة نهاية صغرى $\quad \acute{f}(x)=2x+2=0$

$2x=-2 \to x=-1$ حرجة

$\therefore$ (-1,-5) نهاية صغرى نعوضها في الدالة لايجاد k

$\therefore \ -5=(-1)^2+2(-1)+k \qquad \therefore \ -5=1-2+k$

$-5=-1+k \qquad \therefore k=-5+1=-4$

$f(x)=x^2+2x-4$

$$\therefore \int_1^3 f(x)dx=\int_1^3 (x^2+2x-4)dx=[\frac{x^3}{3}+\frac{2x^2}{2}-4x]_1^3$$

$$=[\left(\frac{27}{3}+9-12\right)-\left(\frac{1}{3}+1-4\right)=6-\left(\frac{1}{3}-3\right)=6-\frac{1}{3}+3=\frac{9}{1}-\frac{1}{3}=\frac{27-1}{3}=\frac{26}{3}$$

-7 اذا كان للمنحنى $f(x)=(x-3)^3+1$ نقطة انقلاب(a,b) جد القيمة العددية للمقدار $\int_0^b \acute{f}(x)\,dx-\int_0^a \acute{f}(x)dx$ ..

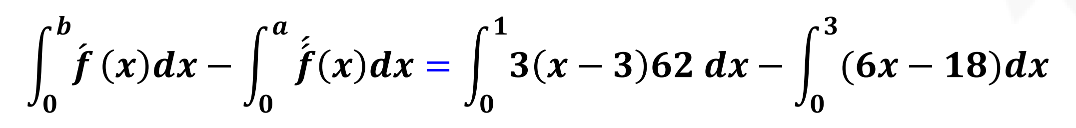
الحل:

$\because$ للدالة نقطة انقلاب $\qquad \therefore \acute{f}(x)=3(x-3)^2.1$

$\acute{\acute{f}}(x)=6(x-3)^1.1=6x-18=0 \qquad \therefore 6x=18 \quad \div 6 \qquad \to x=3$مرشحة

$f(3)=(3-3)^3+1=1 \qquad \therefore (3,1)$نقطة انقلاب $\quad \therefore a=3, b=1$





$$\int_0^b \acute{f}\,(x)dx-\int_0^a \acute{\acute{f}}(x)dx=\int_0^1 3(x-3)62\,dx-\int_0^3 (6x-18)dx$$





$$= 3.\frac{(x-3)^3}{3}]_0^1 - [\frac{6x^2}{2} - 18]_0^3$$

$$= [(1-3)^3 - (0-3)] - [3(3)^2 - 18(3)) - (3(0)^2 - 18(0)]$$

$$= [-8+27] - [27-54] = -8+54 = 46$$

المساحات

طريقه الحل:-

1- نساوي الدالة بالصفر نطلع قيمة x

2- نشوف قيمة x تنتمي للفترة الي منطيها بالسؤال لو لا

3- اذا جانت القيمة الي طلعلت تنتمي للفترة معناه نجزء التكامل (نرتب القيم تصاعديا) واذا مجانت تنتمي مانجزء التكامل

4- نكامل كل جزء حصلنة عليه من نقطة 3

5- خلي في بالك نحط مطلق للمساحة لان لا يمكن ان تكون سالبة

6 نجمع القيم المطلقة لناتج لناتج التكامل



مثال ١/ جد المساحة المحدد بمنحني الدالة $f(x) = x^3 - 4x$ ومحور السينات بالفترة $[-2,2]$

الحل /

$x^3 - 4x = 0$ ← خطوه رقم 1 ساويت الداله بالصفر

$x(x^2 - 4) = 0$

$x = 0$ ← طلعت قيم لكس طلع 0ينتمي اما -+2 من حدي التكامل

$or \ \ x^2 - 4 = 0 \Longrightarrow x^2 = 4 \Longrightarrow x = \mp 2$

الفترات هي $[-2,0], [0,2]$ ← جزئته التكامل

$A_1 = \int_{-2}^{0} (x^3 - 4x)dx = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_{-2}^{0}$ ← اجريت التكامل ع كل فتره جزئناها

$= [0] - \left[\frac{(-2)^4}{4} - 2(-2)^2\right] = -[4 - 8] = 4$

$A_1 = \int_{0}^{2} (x^3 - 4x)dx = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_{0}^{2}$

$= \left[\frac{(-2)^4}{4} - 2(-2)^2\right] - [0] = 4 - 8 = -4$

$A = |A_1| + |A_2| = 4 + 4 = 8$ وحدة مربعة ← جمعنه التكاملات خوش

مثال/ جد مساحة المنطقة التي يحدها مخطط الدالة $y = x^2$ ومحور السينات والمستقيمات $x = 1 \ , \ x = 3$ ؟

الحل:-



$x^2 = 0 \quad \therefore x = 0 \ \notin [1,3]$ لاتنتمي لانجزء

$$A = \int_1^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3}]_1^3 = \left[\frac{27}{3} - \frac{1}{3}\right] = \frac{26}{3}$$

$$A = \left|\frac{26}{3}\right| = \frac{26}{3}$$



مثال/جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x = 0$ ومحور السينات .

الحل:-

نساوي الدالة بالصفر $\therefore x^3 - 3x^2 + 2x = 0$

$x(x^2 - 3x + 2) = 0 \rightarrow x(x-2)(x-1) = 0$

اما $x = 0$ او $x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$ او $x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$

الفترات $[0,1]$, $[1,2]$

$$A1 = \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x)dx = [\frac{x^4}{4} - \frac{3x^3}{3} + \frac{2x^2}{2}]_0^1 = \left(\frac{1}{4} - 1^3 + 1^2\right) - 0$$

$$= \frac{1}{4} - 1 + 1 = \frac{1}{4}$$

$$A2 = \int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2x)dx = [\frac{x^4}{4} - \frac{3x^3}{3} + \frac{2x^2}{2}]_1^2$$

$$= \left[\left(\frac{16}{4} - 8 + 4\right) - \left(\frac{1}{4} - 1 + 1\right)\right] = -\frac{1}{4}$$

$$A = |A1| + |A2| = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

مثال/ جد مساحة المنطقة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = x^2 - 1$ ومحور السينات على الفترة [-2,3]

الحل:

$\therefore x^2 - 1 = 0 \quad \therefore x^2 = 1$

$x = \pm \in [-2, 3]$

الفترات $[-2,-1]$, $[-1,1]$, $[1,3]$



$$A1 = \int_{-2}^{-1} (x^2 - 1)dx = \frac{x^3}{3} -]_{-2}^{-1} = \left(-\frac{1}{3} - (-1) - \left(-\frac{8}{3}\right) - (-2)\right)$$

$$= -\frac{1}{3} + 1 + \frac{8}{3} - 2 = \frac{7}{3} - 1 = \frac{7-3}{3} = \frac{4}{3}$$

$$A2 = \int_{-1}^{1} (x^2 - 1)dx = \frac{x^3}{3} - x]_{-1}^{1} = (\left(\frac{1}{3} - 1\right) - \left(-\frac{1}{3} - (-1)\right)$$

$$= \frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{3} - 1 = \frac{2}{3} - 2 = \frac{2-6}{3} = -\frac{4}{3}$$

$$A3 = \int_{1}^{3} (x^2 - 1)dx = \frac{x^3}{3} - x]_{1}^{3} = (\left(\frac{27}{3} - 3\right) - \left(\frac{1}{3} - 1\right))$$

$$= 6 - \frac{1}{3} + 1 = 7 - \frac{1}{3} = \frac{21-1}{3} = \frac{20}{3}$$

$$A = |A1| + |A2| + |A3|$$

$$= \left|\frac{4}{3}\right| + \left|-\frac{4}{3}\right| + \left|\frac{20}{3}\right| = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{20}{3} = \frac{28}{3}$$

مثال/ جد مساحة المنطقة المحددة بمنحني الدالة $y = sinx$ ومحور السينات على الفترة $[\frac{\pi}{2}, \pi]$.

الحل:



$$\therefore sinx = 0 \qquad \therefore x = 0 ,\bar{\land} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$

الفترة $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, $[0, \pi]$

$$A1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} sinx\, dx = -cosx]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} = -(\cos(0) - c0s\left(-\frac{\pi}{2}\right))$$

$$= -(1 - 0) = -1$$

$$A2 = \int_{0}^{\pi} sinx\, dx = -cosx]_{0}^{\pi} = -(cos\pi - cos0) = -(-1 - 1) = -(-2) = 2$$

$$A = |A1| + |A2| = |-1| + |2| = 3$$



مثال/جد مســـاحة المنطقة المحددة بمنحني الدالة $y = cosx$ ومحور الســـينات على الفترة $[-\pi,\pi]$.

الحل:

$$\therefore cosx = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{2} \in [-\pi,\pi]$$

$$x = -\frac{\pi}{2} \in [-\pi,\pi]$$

الفترات $\left[-\pi,\frac{\pi}{2}\right]$, $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$

$$A1 = \int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} cosxdx = sinx]_{-\pi}^{\frac{-\pi}{2}} = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \sin(-\pi) = -sin\frac{\pi}{2} + sin\pi = -1$$

$$A2 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cosx\,dx = sinx]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = sin\frac{\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = sin\frac{\pi}{2} + sin\frac{\pi}{2} = 1 + 1 = 2$$

$$A3 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} cosx\,dx = sinx]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = sin\pi - sin\frac{\pi}{2} = 0 - 1 = -1$$

$$A = |A1| + |A2| + |A3| = |-1| + |2| + |-1| = 4$$

مساحة المنطقة المستوية المحددة بمنحنيين

خطوات الحل :-

1- نساوي الدالتين نطلع نقاط التقاطع الي تنتمي للفترة

2- بعدها راح تكون دالة جديدة الي هي (فرق بين دالتين) الي هي نكاملها .

مثال/ جد مساحة المنطقة المحددة بالمنحني $y=\sqrt{x}.$ و المستقيم $y=x$

الحل:



$\sqrt{x}=x$ بالتربيع

$x=x^2 \quad \to x^2-x=0 \qquad x(x-1)=0$

اما $x=0$ او $x-1=0 \quad \therefore x=1$

$$A=\int_0^1(\sqrt{x}-x)dx=\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\frac{x^2}{2}]_0^1=\left(\frac{1^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}\right)-0=\frac{1}{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{4-3}{2}=\frac{1}{6}$$

$$\therefore A=\left|\frac{1}{6}\right|=\frac{1}{6}$$



مثال / جد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحني $y=x^3$,المستقيم $y=x$ ؟

الحل /

$x^3=x \to x^3-x=0 \to x(x^2-1)=0$

أما x=0 أو $x^2-1=0 \to x^2=1 \to x=\pm1$

الفترات [-1,0] , [0,1]



A1 A2



$$A1=\int_{-1}^0(x^3-x)dx=\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}]_{-1}^0$$

$$=\left(0-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)\right)=-\frac{1-2}{4}=-\frac{-1}{4}=\frac{1}{4}$$

$$A2=\int_0^1(x^3-x)dx=\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}]_0^1$$

$$=\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)-0=\frac{1-2}{4}=-\frac{1}{4}$$

$$A=|A1|+|A2|=\left|\frac{1}{4}\right|+\left|-\frac{1}{4}\right|\to A=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$



مثـال \ جـد مســـاحـة الـمـنـطـقـة الـمـحـصــورة الـمـحـددة بـالـمـنـحـنـيـين $g(x) = sinx \ , f(x) = cosx$ وعلى الفترة $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ؟



$$sinx = cosx$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = 1 \qquad \rightarrow tanx = 1 \quad \text{موجب}$$

$$x = \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{الاول}$$

$$x = \frac{5\pi}{4} \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\text{الفترات} \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right], \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$A1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} (cosx - sinx)dx = [sinx + cosx]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= [\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}] - \left[\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right] - [-1 + 0]$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}} + 1 = \sqrt{2} + 1$$

$$A2 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (cosx - sinx)dx = [sinx + cosx]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= [\sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2}] - [\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}] = [1 + 0] - \left[\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right] = 1 - \sqrt{2}$$

$$A = |A1| + |A2| = |\sqrt{2} + 1| + |-(\sqrt{2} - 1)| = \sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} - 1 = 2\sqrt{2}$$

المسافة

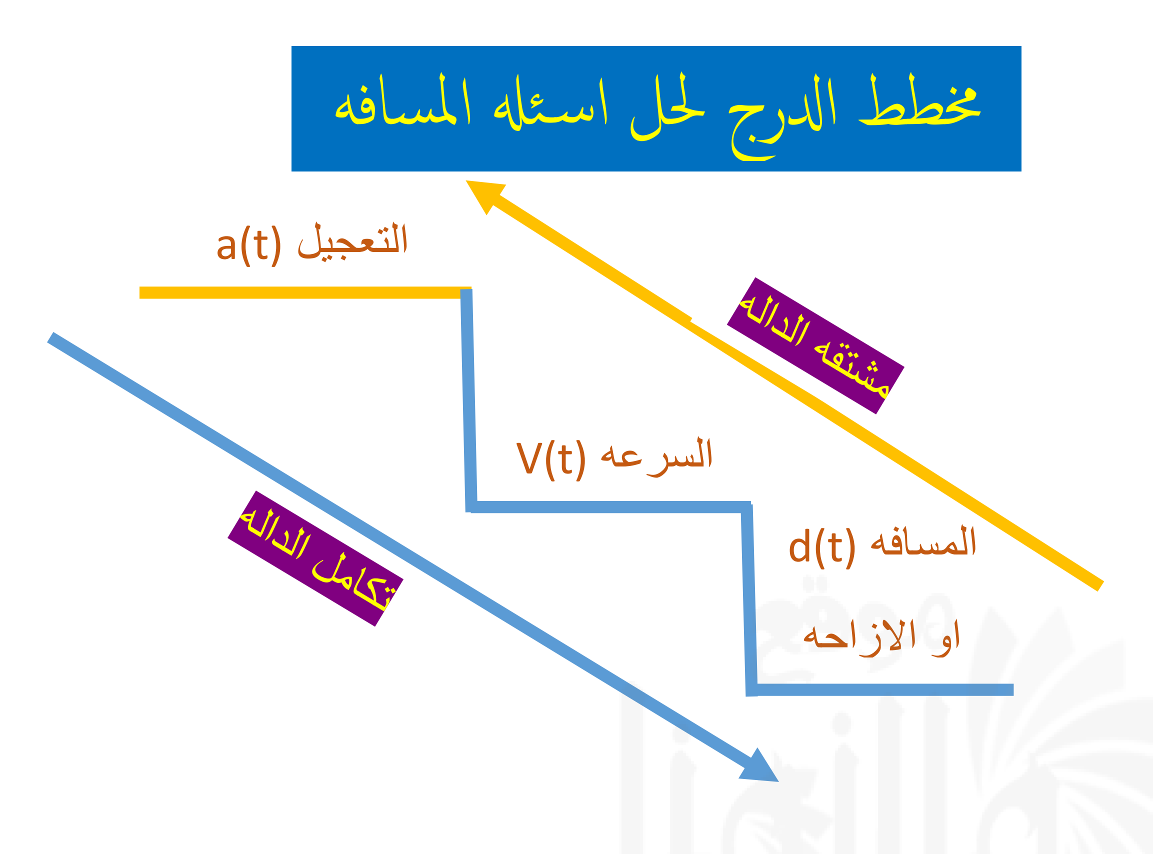
جسم يتحرك على خط مستقيم ويكلك المسافة المقطوعة خلال فترة زمنية [t1,t2] نستخدم القانون

$$d = \left| \int_{t1}^{t2} v(t)dt \right|$$

الازاحة والسرعة والتعجيل

$$S = \int_{t1}^{t2} v(t)dt$$

مخطط الدرج لحل اسئله المسافه





بعض الملاحظات مهمه:-

- تنزل من الدرج (لاتوكع) تكامل الداله من اخر بايه للبايه الي يريدها
- تصعد الدرج تشتقه الداله من اول بايه لحد البايه الي يريدها
- اذا كلك بدا الجسم من السكون معنا (السرعه=0)(الازاحه=0)
- اذا كلك (عاد الجسم الى موضوعه الاول الازاحه =0)

توضيح

1- **نشتق السرعة ينطيني تعجيل**

2- **نكامل التعجيل ينطيني سرعة**

3- **نكامل السرعة ينطيني ازاحة**

4- **نشتق الازاحة ينطيني سرعه**

ملاحظة:-اذا نريد نطلع المسافة المقطوعه خلال فتره معينه قبل تكامل الدالة لازم نساوي الداله بالصفر نطلع قيم x اذا جانت هاي القيم :-

1-تنتمي للفتره المعطاة (نجزء التكامل)

2-لاتنتمي للفتره المعطاة (لانجزء التكامل)



مثال/ جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة $V(t) = 2t - 4\ m/s$ فجد :-

a– المسافة المقطوعة في الفترة [1,3]

$$2t - 4 = 0 \rightarrow \quad 2t = 4 \rightarrow \quad t = 2 \quad \in [1,3]$$

الفترات $[1,2]$, $[2,3]$

$$d = \left|\int_1^2 V(t)dt\right| + \left|\int_2^3 V(t)dt\right|$$

$$= \left|\int_1^2 (2t-4)dt\right| + \left|\int_2^3 (2t-4)dt\right| = [\frac{2t^2}{2} - 4t]_1^2 + [\frac{2t^2}{2} - 4t]_2^3$$

$$= |(4-8)-(1-4)| + |(9-12)-(4-8)| = |-4+3| + |-3+4| = 2$$



b- الازاحة المقطوعة في الفترة [1,3]



$$S = \int_1^3 V(t)dt = \int_1^3 (2t-4)dt = [\frac{2t^2}{2} - 3t]_1^3$$

$$= (9-12) - (1-4) = -3 + 3 = 0$$

c– المسافة المقطوعة في الثانية الخامسة

$$d = \left|\int_4^5 V(t)dt\right| = \left|\int_4^5 (2t-4)dt\right| = \left|[\frac{2t^2}{2} - 4t]_4^5\right|$$

$$= |(25-20)-(16-16)| = |5| \rightarrow d = 5$$



d– بعده بعد مضي 4 ثواني من بدء الحركة



$$S = \int_0^4 V(t)dt = \int_0^4 (2t-4)dt = [\frac{2t^2}{2} - 4t]_0^4$$

$$= (16-16) - (0-0) = 0$$



مثال/ جسـم يتحرك على خط مسـتقيم بتعجيل قدره $18m/s^2$ فأذا كانت سـرعته قد أصـبحت $82m/s$ بعد مرور 4 ثواني من بدء مرور الحركة جد -:

a- المسافة خلال الثانية الثالثة

$$V(t) = ??$$

$$d = \left|\int_2^3 V(t)dt\right|$$

$$V(t) = \int a(t)dt = \int 18dt = 18t + c$$

بعد مرور 4 ثواني82∴ السرعة

$$V(t) = 18t + c \rightarrow 82 = 18(4) + c \rightarrow c = 10$$

السرعة في أي زمن

$$V(t) = 18t + 10$$

$$d = \left|\int_2^3 (18t + 10)dt\right| = \left|\frac{18t^2}{2} + 10t]_2^3\right| = |[81 + 30| - |[36 + 20]|$$

المسافة المقطوعة قي الثانية الثالثة

$$= |111 - 56| = |55| = 55m$$

b- بعده عند نقطة بدء الحركة بعد مرور 3 ثواني

$$S = \int_0^3 V(t)dt = \int_0^3 (18t + 10) = \frac{18t^2}{2} + 10t]_0^3$$

البعد بعد مرور 3 ثواني من بدء الحركة

$$(81 - 30) - 0 = 111m$$

التمارين الخاصة بالموضوع



س1/ جد المساحة المحددة بالمنحني $y = x^4 - x$ ومحور السينات والمستقيمين $x = 1, x = -1$

الحل/ $x^4 - x = 0 \rightarrow x(x^3 - 1) = 0$

أما $x = 0 \in [-1, 1]$ أو $x^3 - 1 = 0 \rightarrow x^3 = 1 \rightarrow x = 1 \in [-1, 1]$

$$A1 = \int_{-1}^{0} (x^4 - x)dx = \frac{x^5}{5} - \frac{x^2}{2}]_{-1}^{0} = (0 - \left(-\frac{1}{5} - \frac{1}{2}\right) = -\frac{-2 - 5}{10} = \frac{7}{10}$$

$$A2 = \int_{0}^{1} (x^4 - x)dx = \frac{x^5}{5} - \frac{x^2}{2}]_{0}^{1} = \left(\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2}\right) - 0\right) = \frac{2 - 5}{10} = -\frac{3}{10}$$

$$A = |A1| + |A2| = \left|\frac{7}{10}\right| + \left|-\frac{3}{10}\right| = \frac{7}{10} + \frac{3}{10} = \frac{10}{10} = 1$$



س2/ جد المســاحة المحددة بالدالة $f(x) = x^4 - 3x^2 - 4$ وعلى الفترة [-2,3] ومحور السينات ؟

$x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \rightarrow (x^2 - 4)(x^2 + 1) = 0$

أما $x^2 - 4 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2 \in [-2, 3]$

أو $x^2 + 1 = 0 \rightarrow x^2 = -1$ يهمل



الفترات $[-2, 2]$, $[2, 3]$

$$A1 = \int_{-2}^{2} (x^4 - 3x^2 - 4)\, dx = [\frac{x^5}{5} - \frac{3x^3}{3} - 4x]_{-2}^{2}$$

$$= \left(\left(\frac{32}{5} - 8 - 8\right) - \left(-\frac{32}{5} + 8 + 8\right)\right) = \frac{32}{5} - 16 + \frac{32}{5} - 16 = \frac{64 - 160}{5} = -\frac{96}{5}$$



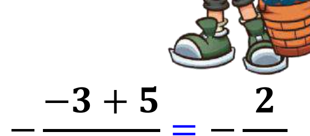
$$A2 = \int_{2}^{3} (x^4 - 3x^2 - 4)\, dx = [\frac{x^5}{5} - \frac{3x^3}{3} - 4x]_2^3$$

$$\left[\left(\frac{243}{5} - 27 - 12\right) - \left(\frac{32}{5} - 8 - 8\right)\right] = \frac{243}{5} - 39 - \frac{32}{5} + 16 = \frac{211 = 115}{5} = \frac{96}{5}$$

$$A = |A1| + |A2| = \left|-\frac{96}{5}\right| + \left|\frac{96}{5}\right| = \frac{192}{5}$$



س3 / جد المساحة المحددة بالدالة $f(x) = x^4 - x^2$ ومحور السينات؟



$$x^4 - x^2 = 0 \rightarrow x^2(x^2 - 1) = 0$$

أما $x^2 = 0 \quad \rightarrow x = 0$ أو $x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = \pm 1$

الفترات $[-1, 0], [0, 1]$

$$A1 = \int_{-1}^{0} (x^4 - x^2)dx = [\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3}]_{-1}^{0} = \left(0 - \left(-\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\right)\right) = -\frac{-3+5}{15} = -\frac{2}{15}$$

$$A2 = \int_{0}^{1} (x^4 - x^2)dx[\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3}]_0^1 = \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3} - 0\right) = \frac{3-5}{15} = -\frac{2}{15}$$

$$A = |A1| + |A2| = \left|-\frac{2}{15}\right| + \left|\frac{2}{15}\right| = \frac{2}{15} + \frac{2}{15} = \frac{4}{15}$$



س4/جد المساحة المحددة بالمنحني $y = sin3x$ ومحور السينات على $[0, \frac{\pi}{2}]$.

الحل:

$$\sin 3x = 0 \qquad \therefore 3x = 0 \;\; \therefore x = 0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

الفترات $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$



$$A1 = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} sin3x\, dx = \frac{1}{3}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} sin3x.3dx = -\frac{1}{3} cos3x]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= -\frac{1}{3}\left(cos3.\frac{\pi}{3} - cos3.0\right) = -\frac{1}{3}(cos\pi - cos0) = -\frac{1}{3}(-1-1) = -\frac{1}{3}(-2) = \frac{2}{3}$$

$$A2=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} sin3x\,dx=\frac{1}{3}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} sin3x.3dx=-\frac{1}{3}cos3x]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=-\frac{1}{3}\left[cos3.\frac{\pi}{2}-cos3.\frac{\pi}{3}\right]=-\frac{1}{3}[0-(-1)]=-\frac{1}{3}$$

$$A=|A1|+|A2|=\left|\frac{2}{3}\right|+\left|-\frac{1}{3}\right|=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=\frac{3}{3}=1$$



س5/ جد المساحة المحددة بالمنحني $y=2\cos^2 x-1$ ومحور السينات على الفترة $[0,\frac{\pi}{2}]$.

الحل:

$$2\cos^2 x-1=0\ \rightarrow cos2x=0\ \therefore 2x=\frac{\pi}{2}\ \therefore x=\frac{\pi}{4}\in[0,\frac{\pi}{2}]$$

$$2x=\frac{3\pi}{2}\rightarrow x=\frac{3\pi}{4}\notin[0,\frac{\pi}{2}]$$



الفترات $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, $[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$

$$A1=\int_0^{\frac{\pi}{4}} cos2x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} cos2x.2dx=\frac{1}{2}sin2x]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\left[sin2.\frac{\pi}{4}-sin2.0\right]$$

$$=\frac{1}{2}[1-0]=\frac{1}{2}$$

$$A2=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} cos2x\,dx=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} cos2x.2dx=\frac{1}{2}sin2x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\left(sinx.\frac{\pi}{2}-\frac{sin2\pi}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}(0-1)=-\frac{1}{2}$$

$$A=|A1|+|A2|=\left|\frac{1}{2}\right|+\left|-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$





س6/ جد المساحة المحددة بالدالتين $y = \sqrt{x-1}$, $y = \frac{1}{2}x$ على [2,5] .

الحل:



$\frac{1}{2}x = \sqrt{x-1}$ بتربيع الطرفين $\frac{1}{4}x^2 = x - 1 \quad * 4$

$x^2 = 4x - 4 \rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \quad \therefore (x-2)(x-2) = 0$

$(x-2)^2 = 0$ بالجذر $x - 2 = 0 \quad \therefore x = 2 \quad \in [2,5]$

الفترة [2,5]

$$A1 = \int_2^5 \left(\frac{1}{2}x - (x-1)^{\frac{1}{2}}\right) dx = \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} - \frac{(x-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}]_2^5 = \frac{x^2}{4} - \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}]_2^5$$

$$= \left(\frac{25}{4} - \frac{2}{3}(5-1)^{\frac{3}{2}}\right) - \left(\frac{4}{4} - \frac{2}{3}(2-1)^{\frac{3}{2}}\right) = \left(\frac{25}{4} - \frac{2}{3}(2^2)^{\frac{3}{2}}\right) - \left(1 - \frac{2}{3}(1)^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$= \frac{24}{4} - \frac{16}{3} - \frac{1}{3} = \frac{25}{4} - \frac{17}{3} = \frac{75-68}{12} = \frac{7}{12}$$

$$A = |A1| = \left|\frac{7}{12}\right| = \frac{7}{12}$$



س7/ جد المساحة المحددة بالدالتين $y = x^4 - 12$, $y = x^2$

الحل:-



$x^4 - 12 = x^2 \qquad \therefore x^4 - x^2 - 12 = 0$

$(x^2 - 4)(x^2 + 3) = 0$, $(x^2 + 3)$ يهمل

$x^2 - 4 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \quad \therefore x = \pm 2$

$$A1 = \int_{-2}^{2} (x^4 - 12 - x^2)\, dx = [\frac{x^5}{5} - 12x - \frac{x^3}{3}]_{-2}^{2}$$

$$= \left[\left(\frac{32}{5} - 24 - \frac{8}{3}\right) - \left(-\frac{32}{5} + 24 + \frac{8}{3}\right)\right] = \frac{32}{5} - 24 - \frac{8}{3} + \frac{32}{5} - 24 - \frac{8}{3}$$

$$= \frac{64}{5} - \frac{16}{3} - 48 = \frac{192 - 80 - 720}{15} = \frac{192 - 800}{15} = -\frac{608}{15}$$

$$A = |A1| = \left|-\frac{608}{15}\right| = \frac{608}{15}$$



س8/جد المساحة المحددة بالدالتين $g(x) = sinxcosx, f(x) = sinx$ حيث

$x \in [o, 2\pi]$

الحل:-

$$g(x) = f(x) \qquad \therefore sinx\ cosx = sinx$$

$$sinx\ cosx - sinx = 0 \rightarrow sinx(cosx - 1) = 0$$

اما $sinx = 0 \qquad \therefore x = 0 \in [0, 2\pi]$

$$x = \pi \in [0, 2\pi]$$

او $cosx - 1 = 0 \qquad \therefore cosx = 1 \qquad \therefore x = 0 \in [0, 2]$

الفترات $[0, \pi]$, $[\pi, 2\pi]$

$$A1 = \int_0^{\pi} (sinxcosx - sinx)dx = \frac{\sin^2 x}{2} + cosx]_0^{\pi}$$

$$= \left(\left(\frac{\sin^2 \pi}{2} + cos\pi\right) - \left(\frac{\sin^2 0}{2} + cos0\right)\right) = (0 + (-1)) - (0 + 1) = -1 - 1$$

$$= -2$$

$$A2 = \int_{\pi}^{2\pi} (sinxcosx - sinx)dx = \frac{\sin^2 x}{2} + cosx]_{\pi}^{2\pi}$$

$$= \left(\left(\frac{sin2\pi}{2} + cos2\pi\right) - \left(\frac{sin\pi}{2} + cos\pi\right)\right) = ((0 + 1) - (0 - 1)) = 1 - (-1)$$

$$= 2$$

$$A = |A1| + |A2| = |-2| + |2| = 2 + 2 = 4$$





س9/ جد المساحة المحددة بالدالتين $y = 2sinx + 1$, $y = sinx$ حيث $x \in [0, \frac{3\pi}{2}]$

الحل:-



$2sinx + 1 = sinx \to 2sinx - sinx + 1 = 0 \quad \therefore sinx = -1$

$x = \frac{3\pi}{2} \left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$

الفترة $[0, \frac{3}{2}]$

$A1 = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} (sinx + 1)dx = -cosx + x]_0^{\frac{3\pi}{2}} = (-\cos\frac{3\pi}{2} + \frac{3\pi}{2}) - (-cos0 + 0)$

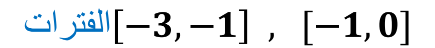
$= 0 + \frac{3\pi}{2} - (-1) = \frac{3\pi}{2} + 1$

$A = |A1| = \left|\frac{3\pi}{2} + 1\right| = \frac{3\pi}{2} + 1$



س10/جد المساحة المحددة بالدالة $y = x^3 + 4x^2 + 3x.$ و محور السينات

الحل:-





$x^3 + 4x^2 + 3x = 0$

$x(x^2 + 4x + 3) = 0 \quad \therefore \quad x(x + 3)(x + 1) = 0$

اما $x = 0$ هو $x + 3 = 0 \; \therefore x = -3$ او $x + 1 = 0 \; \therefore x = -1$

الفترات$[-3, -1]$, $[-1, 0]$

$A1 = \int_{-3}^{-1} (x^3 + 4x^2 + 3x)dx = \frac{x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}]_{-3}^{-1}$

$= \left(\frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2}\right) - \left(\frac{81}{4} - \frac{108}{3} + \frac{27}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2} - \frac{81}{4} + \frac{108}{3} - \frac{27}{2}$

$= -\frac{80}{4} + \frac{104}{3} - \frac{24}{2} = -32 + \frac{104}{3} = \frac{-96 + 104}{3} = \frac{8}{3}$

$A2 = \int_{-1}^{0} (x^2 + 4x^2 + 3x)dx = \frac{x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}]_{-1}^{0}$

$$= (0 - (\frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2}) = -(\frac{3-16+18}{12}) = -\frac{5}{12}$$

$$A = |A1| + |A2| = \left|\frac{8}{3}\right| + \left|-\frac{5}{12}\right| = \frac{8}{3} + \frac{5}{2} = \frac{32+5}{12} = \frac{37}{12}$$



س11/جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة $v(t) = (3t^2 - 6t + 3)m/s$ احسب:-

a-المسافة المقطوعة في [2,4].

الحل:-



$3t^2 - 6t + 3 = 0 \quad] \quad \div 3$

$t^2 - 2t + 1 = 0 \quad \therefore (t-1)^2 = 0$ بالجذر $t = 1 \in [2,4]$

$$d = \left|\int_2^4 (3t^2 - 6t + 3)dt\right| = \left|\frac{3t^3}{3} - \frac{6t^2}{2} + 3t\right]_2^4\right|$$

$= |(64 - 48 + 12) - (8 - 12 + 6)| = |28 - 2|$

$= |26| = 26m$ (المسافة المقطوعة في $[2,4]$)

b-الازاحة في [0,5]

الحل:-

$$S = \int_0^5 v(t)dt = \int_0^5 (3t - 6t + 3)dt = \frac{3t^3}{3} - \frac{6t^2}{2} - 3t]_0^5$$

$= (125 - 75 + 15) - 0 = 65m$ الازاحة في $[0,5]$





س12/ جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل قدره $(4t+12)m/s$ وكانت سرعته بعد مرور 4 ثواني تساوي 90m/s جد:-

a-السرعة عندما t=0.

الحل:-

$v(t) = \int a(t)dt = \int (4t+12)dt$ يجب ايجاد السرعة في اي زمن

$v = \frac{4t^2}{2} + 12t + c$

بعد مرور 4 ثواني v=90

$90 = 2(4)^2 + 12(4) + c \qquad \therefore 90 = 32 + 48 + c$

$90 - 80 = c \qquad \therefore c = 10$ نعوض في v

$\therefore v(t) = 2t^2 + 12t + 10$ السرعة في اي زمن

$\therefore v(2) = 2(2)^2 + 12(2) + 10 = 8 + 24 + 10 = 42m/s$

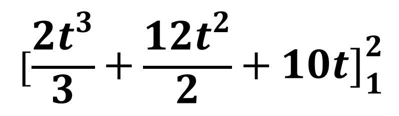
b-المسافة خلال الفترة [1,2]



الحل:-

$v(t) = 2t^2 + 12t + 10$

$\therefore d = \int_1^2 (2t^2 + 12t + 10)dt$



$[\frac{2t^3}{3} + \frac{12t^2}{2} + 10t]_1^2$



$= \left(\frac{16}{3} + 24 + 20\right) - \left(\frac{2}{3} + 6 + 10\right) = \frac{16}{3} + 44 - \frac{2}{3} - 16 = \frac{14}{3} + 28$

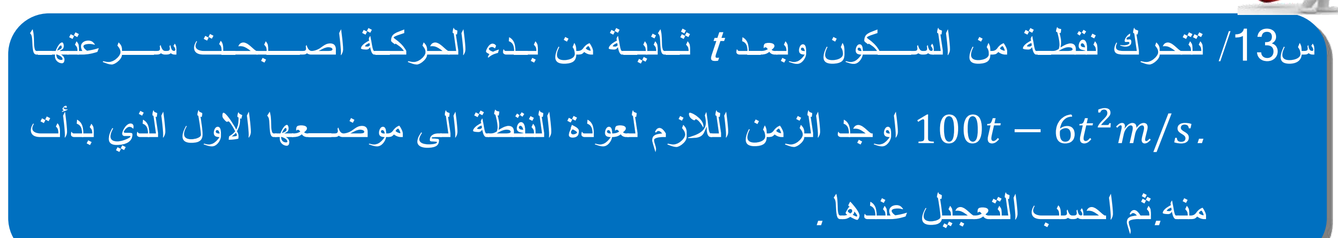
$= \frac{14+84}{3} = \frac{98}{3}$

c-الازاحة بعد 10sec من بدء الحركة:-

الحل:-

$$S=\int_0^{10} v(t)dt=\int_0^{10}(2t^2+12t+10)dt=\frac{2t^3}{3}+\frac{12t^2}{2}+10t]_0^{10}$$

$$=\left(\frac{2000}{3}+600+100\right)-(0)=\frac{2000}{3}+700=\frac{2000+2100}{3}=\frac{4100}{3}m$$



س13/ تتحرك نقطة من السكون وبعد t ثانية من بدء الحركة اصبحت سرعتها $100t-6t^2 m/s.$ اوجد الزمن اللازم لعودة النقطة الى موضعها الاول الذي بدأت منه.ثم احسب التعجيل عندها .

الحل:- النقطة تعود الى موضعها الاول اي الازاحة =صفر

$$S=\int v(t)dt=\int (100-6t^2)dt=\frac{100t^2}{2}-\frac{6t^3}{3}+c$$

$S=0\ ,\quad t=0$ $\therefore$ الجسم يتحرك من السكون $\because$

$o=50(0)^2-2(0)^3+c \qquad \therefore c=0$

$\therefore S=50t^2-2t^3 \rightarrow \therefore o=50t^2-2t^3\ ]\ \div 2$ لان الجسم يعود الى موضعه الاول

$25t^2-t^3=0$ اي $S=0$

$t^2(25-t)=0$ اما $t^2=0 \quad \therefore t=0$ يهمل

او $25-t=0 \quad \therefore t=25$ الزمن اللازم لعودة الجسم الى موضعه الاول

$a(t)=v(t)=100-12t$

$a(25)=100-12(25)=100-300=-200m/\sec^2.$

الحجوم الدورانية

شوف مجرد قانونين صادي وسيني وتطبيق مباشر

أذا جان السؤال محور سيني $V = \pi \int_a^b y^2 dx$

فترة التكامل هو ينطيها الك x=a الى x=b هيج ينطيها وحنا متعودين الصغير جوه والجبير فوك

أذا جان صادي $V = \pi \int_a^b x^2 dy$

فترة التكامل هو ينطيها الك y=a الى y=b هيج ينطيها وحنا متعودين الصغير جوه والجبير فوك

مثال/المنطقة المحددة بين $0 \le x \le 4$, $y = \sqrt{x}$ ومحور السـينات دارت حول محور السينات جد حجمها ؟

الحل:-

$V = \pi \int_a^b y^2 dx \qquad \because y = \sqrt{x} \to y^2 = x$



$x = a$

$$= \pi \int x dx = \pi \frac{x^2}{2}]_0^4$$

$V = \pi \left(\frac{16}{2} - 0\right) = 8\pi$ وحدة مكعبة

مثال/ المنطقة المحددة بين المنحني $1 \le y \le 4$, $x = \frac{1}{\sqrt{y}}$ دارت حول الصــادات جد حجمها؟

الحل:-



$v = \pi \int_1^4 x^2\, dy \qquad \because x = \frac{1}{\sqrt{y}} \qquad \to x^2 = \frac{1}{y}$

$$= \pi \int_1^4 \frac{1}{y} dy = \pi ln|y|]_1^4 = \pi(ln4 - ln1) = \pi ln4 = \pi ln2^2 = 2ln2$$

مثال/ اوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحددة بالمقطع المكافئ الذي معادلته $y^2 = 8x$ والمستقيمين x=0 و x=2 حول المحور السيني؟

الحل:-



$$v = \pi \int_{x=a}^{b} y^2 dx = \pi \int_{0}^{2} 8x\, dx = \pi \frac{8x^2}{2}\Big]_0^2 = 4\pi(4-0) = 16\pi$$

مثال/ اوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحددة بالمقطع المكافئ الذي معادلته $y = 2x^2$ والمستقيم x=5 و x=0 حول محور السينات؟

الحل:-



$$v = \pi \int_{x=a}^{b} y^2\, dx \qquad y = 2x^2 \rightarrow y^2 = 4x^4$$

$$= \pi \int_{0}^{5} 4x^4 dx = \pi \frac{4x^5}{5}\Big]_0^5 = \frac{4\pi}{5}(5^5 - 0) = \frac{4\pi}{1}(625) = 2500\pi$$



التمارين الخاصة بالموضوع

س1/ اوجد الحجم الدوراني المتولد من دوران القطع المكافئ $y = x^2$ والمستقيمين x=2 و x=1 حول المحور السيني .

الحل:-



$$v = \pi \int_{x=a}^{b} y^2\, dx \qquad \because y = x^2 \qquad \therefore y^2 = x^4$$

$$= \pi \int_{x=1}^{2} x^4\, dx = \pi \frac{x^5}{5}\Big]_1^2 = \pi\left(\frac{32}{5} - \frac{1}{5}\right) = \frac{31}{5}\pi$$

س2/ اوجد الحجم الناتج من دوران منحني الدالة $y = x^2 + 1$ والمستقيم y=4 حول المنحني الصادي .

الحل:-



$$y = x^2 + 1 \to x^2 = y - 1$$

نجعل $x = 0$ و نجد y

$$\therefore y = 0^2 + 1 = 1 = y$$

$$v = \pi \int_{y=a}^{b} x^2\, dy$$

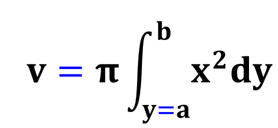
$$= \pi \int_{1}^{4} (y - 1)\, dy$$

$$= \pi\left(\frac{y^2}{2} - y\right)]_1^4 = \pi\left[\left(\frac{16}{2} - 4\right) - \left(\frac{1}{2} - 1\right)\right] = \pi(4 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \pi\left(4 + \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi(8+1)}{2} = \frac{9}{2}\pi$$

س3/ احسب الحجم المتولد من دوران المنحني $y^2 + x = 1$ والمستقيم x=0 حول الصادي.



الحل:-



$$v = \pi \int_{y=a}^{b} x^2 dy$$

$$y^2 + x = 1 \to x = 1 - y^2$$

$$\because x = 0 \to y^2 + 0 = 1 \to y^2 = 1 \to y = \pm 1$$

$$v = \pi \int_{-1}^{1} (1 - y^2 + y^4) dy$$

$$x^2 = (1 - y^2)^2 = 1 - 2y^2 + y^4$$

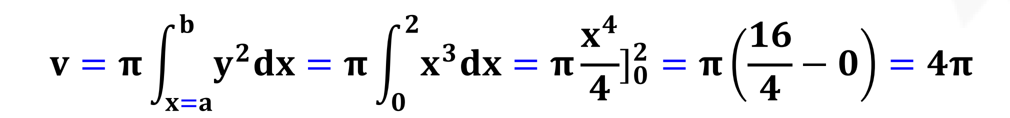
$$= \pi[y - \frac{2y^3}{3} + \frac{y^5}{5}]_{-1}^{1} =$$

$$= \pi\left(\left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) - \left(-1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{5}\right)\right) = \pi\left(2 - \frac{4}{3} + \frac{2}{5}\right) = \pi\left(\frac{30-20+6}{15}\right) = \frac{16}{15}\pi$$



س4/ احسب الحجم المتولد من دوران المنحني $y^2 = x^2$ والمستقيمين x=0 وx=2 حول المحور السيني .

الحل:-



$$v = \pi \int_{x=a}^{b} y^2 dx = \pi \int_{0}^{2} x^3 dx = \pi \frac{x^4}{4}]_0^2 = \pi\left(\frac{16}{4} - 0\right) = 4\pi$$



الان ياصديقي قبل مجموعه الاسئلة الوزاريه والخارجية نخذ ملخص مساعد في الفصل وهو

كيف نفكر بحل اسئلة التكامل

تكامل الدوال العاديه (الجبريه)

- نبدا بسوال التكامل بالاسئله التاليه

$$\int (x^3 - 3x^2)dx$$

$$\int (x^4 + 3x + 3)dx$$

س1 :-نكدر نكامل الداله بشكل مباشر؟ (اي نكدر)

- $\int (x-2)(2x+3)dx$
- $\int (x+3x)^2$

س1 :-نكدر نكامل الداله بشكل مباشر؟(لا مانكدر)

س2:-نكدر نضرب الاقواس او نفك القوس (اي نكدر)

- $\int \frac{x^2-4x+3}{x^4}dx$
- $\int \frac{5+2x}{\sqrt{x}}$
- $\int \frac{x-\sqrt{x}}{x}dx$

- **س1 :-نكدر نكامل الداله بشكل مباشر؟(مانكدر)**

س2:-نكدر نضرب الاقواس او نفك القوس؟(مانكدر)



- س3:-نكدر نوزع البسط والمقام اذا جان المقام حد واحد ...(اي نكدر)

- $\int \frac{x^3-27}{x-3} dx$, $\int \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} dx$, $\int \frac{x^2-4x+3}{x-1} dx$

- فكر في اول ثلاث اسئله هل هي ممكنه او لا (غير ممكنه)

- س4:-نكدر نحلل ونختصر المقام ..(اي نكدر)

- $\int \frac{x+1}{x^2+2x+5} dx$, $\int \frac{x^3-x}{x^4-2x^2} dx$

- فكر في اول4 اسئله هل هي ممكنه او(لاغير ممكنه)

- س5:-هل البسط هو مشتقه المقام ..(نعم مشتقة المقام)

- $\int (2x-3)\sqrt{x^2-3x+5}\ dx$

فكر في اول 5 اسئله هل هي ممكنه(غير ممكنه)

س6:-هل التكامل هو داله في مشتقتها (نعم دالة في مشتقتها)

عزيزي الطالب كل سوال تكامل داله عاديه يجب مراعاة الاسئله اعلاه قبل الحل ولتاكد انك فهمت حاول ان تحل الاسئله



الدوال المثلثية

- $\int(-sinxcosx + sinx)dx$

س1:-هل بمكانك ان تكامل بستخدام قوانين الدوال المثلثيه(بشكل مباشر)(نعم)

- $\int \sin^4 x \cos x dx$, $\int cosx/\sin^3 xdx$

س1:-هل بمكانك ان تكامل بستخدام قوانين الدوال المثلثيه(بشكل مباشر) (لا)

س2:-هل التكامل حاصل ضرب دالتين ....(نستخدم القوانين والتعويض)(نعم)

- $\int tanx\, dx$, $\int cotxdx$, $\int \frac{\sec^2 x}{tanx}dx$

عزيزي الطالب تحق من السوالين اعلاه هل من الممكن ان تطبق(لا)

س3:-هل نستخدم احد قوانين المتطابقات بعدها نطبق قواعد التكامل(نعم)

س4:-هل التكامل حاصل قسمه دالتين...(نختبر هل البسط هو مشتقه المقام)(نعم)

صديقي افهم الي موجود فوك كلش زين وتعال وياي نحل الاسئلة ادناه





مجموعه من الاسئلة المهمه والوزاريه

س\اجد تكامل الدوال الاتية ؟

1. $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} secx\, tanx\, dx$
2. $\int_{0}^{4} \frac{2x}{x^2+9} dx$
3. $\int_{0}^{1} \frac{3x^2+4}{x^3+4x+1} dx$
4. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (sinx+cosx)^2 dx$
5. $\int (4x+6)\sqrt{2x+3}\, dx$
6. $\int \frac{\sin\left(\sqrt{x}+7\right)}{\sqrt{x}}$
7. $\int_{3}^{8} \frac{x}{\sqrt{x^3+x^2}} dx$
8. $\int_{0}^{1} \frac{x}{(x^2+1)^2} dx$
9. $\int \cos^2 2x\, sinx\, dx$
10. $\int_{-1}^{1} \sqrt[3]{3x^3-2x^5}\, dx$
11. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{9-12x+4x^2}$



س\جد المساحة المحدده بمنحني الدالة لكل مما ياتي ؟

1. $f(x) = sin4x \quad , \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
2. $f(x) = (x-1)^3 \quad , \quad x \in [-1, 3]$
3. $f(x) = 1 - 2\sin^2 x \quad , \quad x \in [0, \frac{\pi}{2}]$
4. $f(x) = \sqrt{2x-1} \quad , \quad x \in [01, 5]$
5. $f(x) = 3x^3 + 4 \quad , \quad x \in [-2, 2]$

س\جد المساحة المحدده بمنحني دالتين لكل مما ياتي ؟

1. $f(x) = x \quad , \quad g(x) = \sqrt[3]{x} \quad , \quad x \in [-1, 1]$
2. $f(x) = sinx \quad , \quad g(x) = sinx\, cosx \quad , \quad x \in [0, 2\pi]$
3. $f(x) sin2x \quad , \quad g(x) = sinx \quad , \quad x \in [0, \frac{\pi}{2}]$
4. $f(x) = x^2 \quad , \quad g(x) = x^4 - 12$
5. $f(x) = \sqrt{2x-1} \quad , \quad g(x) = x \quad , \quad x \in [1, 5]$
6. $f(x) = sinx \quad , \quad g(x) = \sin^2 x \quad , \quad x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

س/جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة $v(t) = 3t^2 + 4t + 7$ جد المسافة التي يقطعها الجسم بعد مضي 4 ثواني من بدء الحركة ثم جد التعجيل عندها.

س/جسم متحرك على خط مستقيم وكانت سرعته $v(t) = \frac{3}{2}\sqrt{t} + \frac{3}{\sqrt{t}}$ وكان بعده بعد مرور 4 ثواني $20m$ جد الازاحة عند كل t ثم جد الزمن عندما يصبح التعجيل =صفر.

س/جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل مقداره $10m/s^2$ وبعد 2 ثانية من بدء الحركة تصبح سرعته $24m/s$ احسب 1-المسافة المقطوعة في الثانية الخامسة .2بعد الجسم بعد مضي ثوان من بدء الحركة .





واجبات التكامل الخارجيه

س/1 احسب التكاملات الدوال الآتية

1) $\int (2\sqrt{x} - 3x^4)dx$

2) $\int \left(\frac{3}{x^4} - 4x^2 + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx$

3) $\int \sqrt{x}(x-3)^2 dx$

4) $\int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right)dx$

5) $\int 3(3x^2-1)^3 x dx$

6) $\int (x^4+2x)^2(4x^3+2)dx$

7) $\int x\sqrt{x^2+1}\, dx$

8) $\int 5(5x^7+2)^2 x^6 dx$

9) $\int \sqrt{1-4x}dx$

10) $\int \sqrt[3]{5+x^3}(x^2)dx$

11) $\int \frac{(1+3x)dx}{\sqrt{2x+3x^2}}$

12) $\int (3x-x^3)^5(1-x^2)dx$

13) $\int \frac{t^3-4t+3\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt$

14) $\int \frac{\sec x \tan x}{3+2\sec x}dx$

15) $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}dx$



س/2 احسب التكاملات الدوال الآتية

1) $\int \cos^3 x \sin x dx$

2) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}dx$

3) $\int (1+\sin t)^2 \cos t dt$

4) $\int x\cos(3x^2)dx$

5) $\int x^2 \sec^2 x^3 dx$

6) $\int \cos^3 2t \sin 2t\, dt$

7) $\int \cos 4\theta \sqrt{2-\sin 4\theta}d\theta$

8) $\int \tan^3 5x \sec^2 5x\, dx$

9) $\int \sin 3\theta \sec^2 \cos 3\theta\ d\theta$

10) $\int (1-\cos x)^3 \sin x dx$

11) $\int (1-\sin 2\vartheta)^{\frac{1}{3}} \cos 2\vartheta\ d\vartheta$

12) $\int x^7 \tan(8x^8+6)dx$

13) $\int \sin(7-\cos 3x)\sin 3x dx$

14) $\int te^{t^2}\ \sec(2+e^{t^2})\tan(2+$

15) $\int \frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt$

16) $\int \frac{\sec x \tan x}{(3+2\sec x)^2}dx$

17) $\int \frac{\cos x - \sin x}{(\sin x + \cos x)^3}dx$

18) $\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{5-\tan x}}dx$

19) $\int \frac{x+\cos 2x}{\sqrt[3]{x^2+\sin 2x}}dx$

20) $\int \frac{3\cot\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt$

21) $\int (2+\tan^2 x)\sec^2 x dx$



س3/ احسب تكاملات الدوال الآتية

1) $\int_{0}^{2} x\sqrt{4-x^2}\,dx$

2) $\int_{0}^{2} (2-4x)\,dx$

3) $\int_{-1}^{2} |2x-3|\,dx$

4) $\int_{2}^{3} \frac{x^2-2}{x^2}\,dx$

5) $\int_{-1}^{1} x^2\sqrt{2-x^3}\,dx$

6) $\int_{0}^{3} f(x)$, حيث $f(x)=\begin{cases} 2x, & x\le 1 \\ 2, & x>1 \end{cases}$

7) $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$, حيث $f(x)=\begin{cases} 3, & x\le 0 \\ x+3, & x>0 \end{cases}$

8) $\int_{1}^{4} \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dx$

9) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1+\cos x)\,dx$

10) $\int_{0}^{1} \frac{x}{x+1}\,dx$

11) $\int_{-1}^{2} x\sqrt{9-x^2}\,dx$

12) $\int_{0}^{2} (x^3-1)^{\frac{2}{3}} x^2\,dx$





07828808092

الاستاذ:-حمزة حازم الكربلائي

الاستاذ حمزه الكربلائي

الخصوصي في

الرياضيات

الفصل الخامس

اعداد الاستاذ :

حمزة حازم الكربلائي

للصف السادس العلمي

بفرعيه الاحيائي والتطبيقي

0782 8808 092



المعادلات التفاضليه

المعادلة التفاضلية اشلون نعرفها (من نلكي بالمعادلة مشتقة وحدة او ثنين ....) نكول عليها معادلة تفاضلية



بعض الأمثلة الي تبين ألنه (المعادلة) هي معادلة تفاضلية

1) $\frac{dy}{dx} = 3x - 4x$

2) $x^2y'' + xy' - x^3y = 0$

3) $\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{dy}{dx} = y - 4$

4) $y' + x^2y + x = y$

5) $(y''')^3 + 2y' + x^2 lnx = 5$

6) $y^4 + cosy + x^2yy' = 0$

شلون عرفنة المعادلات الي فوك هي معادلات تفاضلية لأن بيها مشتقات

(هسة عرفنة المعادلة نجي لشي مهم هو رتبة ودرجة المعادلة التفاضلية)

-1 رتبة المعادلة التفاضلية ....هي اعلى مشتقة بالمعادلة

يعني نشوف المشتقات مثلا أولى وثانية نكول الرتبة الثانية لان أعلى شي بيها الثانية)

-2 درجه المعادلة التفاضلية .... هي اعلى اس لأعلى مشتقة بالمعادلة التفاضلية



مثال جد رتبة ودرجة المعادلة التفاضلية :-

1) $\frac{dy}{dx} + x - 7y = 0$ من الرتبة الاولى والدرجة الأولى

2) $\frac{d^2y}{dx^2} = 5x - 3xy + 7$ من الرتبة الثانية والدرجة الأولى



3) $(y''')^3 + y' - y = 0$ من الرتبة الثالثة والدرجة الثالثة

4) $y'' + 2y(y')^3 = 0$ من الرتبة الثانية والدرجة الأولى

5) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 = x^3 - 5$ من الرتبة الأولى والدرجة الرابعة

6) $x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 + 2\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ من الرتبة الثالثة والدرجة الثانية

7) $y^{(4)} + cosy + x^2y\,y' = 0$ من الرتبة الرابعة والدرجة الأولى

ملاحظه مهمة:- منكدر نطلع (رتبة ودرجة المعادلة) اذا جان المعادلة بيها جذر (الحل) نتخلص من الجذر بالة نكدر)

8) $(y'')^2 = \sqrt{1 + (y')^2}$ نربع الطرفين علمود اتخلص من الجذر

$(y'')^4 = (1 + (y'))$ الرتبة الثانية والدرجة الرابعة

حل المعادلات التفاضلية الاعتيادية

بالسؤال راح يكون عدنة معادلة (عرفنها شنو) وعدنا علاقة

اكو شروط للعلاقة هي

1- ما بيها اي مشتقة

2- معرفة على فترة معينة (هاي موشغلك شغل ابو السؤال)

3- تحقق المعادلة التفاضلية (هاي النقطة هي شغلك)

طريقه الحل :

1- اروح اسئل المعادلة التفاضلية كم مشتقة تحتاجين (نشتق العلاقة بعدد رتبة المعادلة يعني اذ رتبة المعادلة 2 اشتق مرتين)

2- نشتق ونعوض بالطرفين مال العلاقة لازم الطرف الايمن يساوي الايسر

مثال / بين ان العلاقة $y = x^2 + 3x$ حلا للمعادلة التفاضلية $xy' = x^2 + y$



$$y = x^2 + 3x \rightarrow y' = 2x + 3$$

أشتقيت العلاقة مرة وحدة لان المعادلة التفاضلية تريد مني مشتقة وحدة

$$LHS = xy' = x(2x+3) = 2x^2 + 3x$$

$$R.H.S = x^2 + y = x^2 + x^2 + 3x \rightarrow 2x^2 + 3x$$

$$L.H.S = R.H.S$$





:. العلاقة تمثل حلا للمعادلة التفاضلية



مثال/ اثبت ان $y = x\ln|x| - x$ احد حلول المعادلة $x\frac{dy}{dx} = x + y$ $\;x > 0$

$$y = x\ln|x| - x$$

$$\frac{dy}{dx} = x.\frac{1}{x} + \ln|x|\,1 - 1$$

$$= 1 + \ln|x| - 1 = \ln|x|$$

$$L.H.S = x\frac{dy}{dx} = x\ln x$$

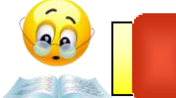
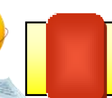
$$R.H.S = x + y$$

$$= x + x\ln|x| - x = x\ln|x|$$

$$\therefore L.H.S = R.H.S$$



العلاقة تمثل حلا للمعادلة التفاضلية ..:

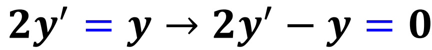



مثال / بين ان $a \in R \,, lny^2 = x + a$ حلا للمعادلة $2y' - y = 0$

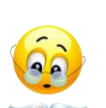
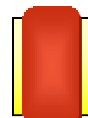


$$lny^2 = x + a \rightarrow 2\ln|y| = x + a \rightarrow 2\frac{1}{y}(y') = 1$$

$$2y' = y \rightarrow 2y' - y = 0$$



العلاقة تمثل حلا للمعادلة التفاضلية

مثال / هل $y = x^3 + x - 2$ حلا للمعادلة التفاضلية $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x$

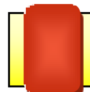


$$y = x^3 + x - 2$$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 1$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x \rightarrow L.H.S = R.H.S$$

العلاقة تمثل حلا للمعادلة ..:

مثال / برهن ان $y=3cos2x+2sin2x$ هو حلا للمعادلة التفاضلية $y''+4y=0$

$$y = 3cos2x + 2sin2x$$

$$y' = 3[-sin2x].2 + 2[cos2x].2$$

$$= -6sin2x + 4cos2x$$

$$y'' = -6[cos2x].2 + 4[-sin2x].2$$

$$= -12cos2x - 8sin2x$$

$$L.H.S = y'' + 4y = -12cos2x - 8sin2x + 4[3cos2x + 2sin2x]$$

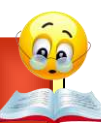
$$= -12cos2x - 8sin2x + 12cos2x + 8sin2x$$

$$R.H.S = 0$$

$$L.H.S = R.H.S$$



العلاقة تمثل حلا للمعادلة التفاضلية







$y^2 = 3x^2 + x^3$

$2y\,y' = 6x + 3x^2$

$2y.y + y'.2.y' = 6 + 6x$

$[2y\,y'' + 2(y')^2 = 6 + 6x] \div 2$

$yy'' + (y')^2 = 3 + 3x$

$yy'' + (y')^2 - 3x = 3$

$L.H.S = y\,y'' + (y')^2 - 3x = 3$

$R.H.S = 5$

$\therefore L.H.S \neq R.H.S$

.: العلاقة لا تمثل حل للمعادلة التفاضلية



$y = e^{2x} + e^{-3x}$

$y' = e^{2x}.2 + e^{-3x}.-3 = 2e^{2x} - 3e^{-3x}$

$y'' = 2.e^{2x}.2 - 3e^{-3x}(-3) = 4e^{4x} + 9e^{-3x}$

$L.H.S = y'' + y' - 6y$

$= 4e^{2x} + 9e^{-3x} + 2e^{2x} - 3e^{3x} - 6(e^{2x} + e^{-3x}) = e^{2x}.e^{-3x}$

$R.H.S = 0$

$L.H.S = R.H.S$

.: العلاقة تمثل حلا للمعادلة التفاضلية



التمارين الخاصة بالموضوع

1- بين رتبة ودرجة كل من المعادلات التفاضلية الاتية

1) $(x^2 - y^2) + 3xy\frac{dy}{dx} = 0$ الرتبة الأولى والدرجة الأولى

2) $\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - 5y = 7$ الرتبة الثانية والدرجة الأولى

3) $(y''')^3 + y' - y = 0$ الرتبة الثالثة والدرجة الثالثة

4) $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 - 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^5 + 3y = 0$ الرتبة الثالثة والدرجة الثانية



2- برهن ان $y = sinx$ هو حلا للمعادلة $y'' + y = 0$



$y = \sin x \to y' = cosx.1 = cosx$

$y'' - sinx.1 = -\sin x$

$L, H, S = y'' + y \ = -sinx + sinx = 0$

$R.H.S = 0$

$L.H.S = R.H.S$

.: العلاقة تمثل حلا للمعادلة التفاضلية



3- برهن ان العلاقة s=8cos3t+6sin3t هي حلا للمعادلة $\frac{d^2s}{dt^2} + 9s = 0$



$s = 8cos3t + 6sin3t$

$\frac{ds}{dt} = 8[-sin3t].3 + 6[cos3t].3$

$= -24sin3t + 18cos3t$

$\frac{d^2s}{dt^2} = -24[cos3t].3 + 18[-sin3t].3$

$= -72cos3t - 54sin3t$

$$L.H.S = \frac{d^2s}{dt^2} + 9s = -72cos3t - 54sin3t + 9(8cos3t + 6sin3t)$$

$$= -72cos3t - 45sin3t + 72cos3t + 54sin3t = 0$$

$$R.H.S = 0 \rightarrow L.H.S = R.H.S$$

4- هل ان $y = x + 2$ هو حلا للمعادلة $y'' + 3y' + y = x$



$$y = x + 2$$

$$y' = 1$$

$$y'' = 0$$

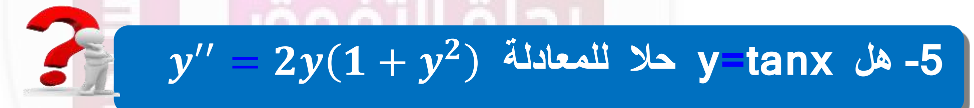
$$L.H.S = y'' + 3y' + y = 0 + 3(1) + x + 2$$

$$= 0 + 3 + x + 2 = 5 + x$$

$$R.H.S = x$$

$$L.H.S \neq R.H.S$$

.: العلاقة لا تمثل حلا للمعادلة التفاضلية



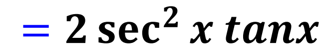


$$y = tanx$$

$$y' = \sec^2 x = (secx)^2$$

$$y'' = 2(secx)^1.secx.tanx.1$$

$$= 2\sec^2 x\, tanx$$



$$L.H.S = y'' = 2\sec^2 x\, tanx$$

$$R.H.S = 2y(1 + y^2)$$

$$= 2tanx(1 + \tan^2 x) = 2tanx(\sec^2 x)$$

$$L.H.S = R.H.S$$





.: العلاقة تمثل حلا للمعادلة التفاضلية

6- هل $2x^2+y^2=1$ حلا للمعادله التفاضليه $y^3y''=-2$

$$2x^2+y^2=1 \rightarrow 4x+2yy'=0$$

$$2yy'=-4x \rightarrow y'=\frac{-4x}{2y}=\frac{-2x}{y} \ldots\ldots\ldots 1$$

$$y''=\frac{(y(-2)(-2x).y')}{y^2}=\frac{-2y+2xy'}{y^2} \ldots\ldots\ldots 2$$

نعوض 2 في 1

$$\left[y^2y''=-2y+\left[\frac{-4x^2}{y}\right]\right].y$$

$$y^3y''=-2y^2-4x^2$$

$$y^3y''=-2[y^2+2x^2]$$

$$y^3y''=-2$$

$$L.H.S=y^3y''=-2$$

$$R.H.S=-2$$

$$\therefore L.H.S=R.H.S$$

.: العلاقة تمثل حلا للمعادلة التفاضلية



7- هل $yx=\sin 5x$ حلا للمعادلة $xy''+2y'+25yx=0$



$$yx=\sin 5x$$

$$y.1+x.y'=\cos 5x.5$$

$$y'+x.y''+y'.1=5[-\sin 5x].5$$

$$=xy''+2y'=-25\sin 5x$$

$xy'' + 2y' + 25sin5x = 0$

$xy'' + 2y' + 25yx = 0$

$L.H.S = xy'' + 2y' + 25xy = 0$

$R.H.S = 0$

$L.H.S = R.H.S$

:. العلاقة تمثل حلا للمعادلة التفاضلية



8- بين ان $y = ae^{-x}$ هو حلا للمعادلة التفاضلية $y' + y = 0$ حيث $a \in R$



$y = ae^{-x}$
$y' = a(e^{-x})(-1) = -ae^{-x}$
$l.H.s = y' + y = -ae^{-x} + ae^{-x} = 0$
$R.H.S = 0$
$:.L.H.S = R.H.S$

:. العلاقة تمثل حلا للمعادلة التفاضلية



9- بين ان $c \in R, lny = x^2 + c$ هو حلا للمعادلة $y'' = 4x^2y + 2y$



$lny = x^2 + c$

$\frac{y'}{y} = 2x \rightarrow y' = 2xy \ldots\ldots\ldots 1$

$y'' = 2x.y' + y(2)$

$y'' = 2xy' + 2y \ldots\ldots\ldots 2$



نعوض 2 في 1

$y'' = 2x(2xy) + 2y$



$y'' = 4x^2y + 2y$
$L.H.S = y'' = 4x^2y + 2y$
$R.H.S = 4x^2y + 2y$
$R.H.S = 4x^2y + 2y$

$\therefore L.H.S = R.H.S$

∴ العلاقة تمثل حلا للمعادلة التفاضلية

واجبات

1- هل ان العلاقة $y = x^2 + cx$ تمثل حل للمعادلة $xy' = x^2 + y$

2- هل ان العلاقة $y = asin2x - bcos2x$ تمثل حل للمعادلة $y'' + 4y = 0$

3- هل ان العلاقة $y = ae^{-x} + be^{-2x}$ تمثل حل للمعادلة $y'' + 3y' + 2y = 0$

طرق حل المعادلات التفاضلية

1- طريقة فصل المتغيرات

طريقة الحل:-

1- نخلي كل الحدود الي بيها x ويه dx بجه يعني ماريد اي اثر لل y يمهم (اما نقسم او نضرب حسب السؤال)

2- نخلي كل الحدود الي بيها yويه dy بجه يعني ماريد اي اثر لل xيمهم

3- من فصلنة نجي انكامل الطرفين

ملاحظة:-

1- اذا لكينة y' تحول الى $\frac{dy}{dx}$

2- اذا انطاني قيمة x,y نعوضهم بعد التكامل علمود نطلع قيمة c



مثال:-حل المعادلة $\frac{dy}{dx} = 2x + 5$



$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x+5}{1} \to dy = (2x+5)dx$$

$$\int dy = \int (2x+5)dx$$

$$y = \frac{2x^2}{2} + 5x + c$$

$$y = x^2 + 5x + c$$





مثال / حل المعادلة $\frac{dy}{dx} = \frac{x-1}{y}$



$$\because \frac{dy}{dx} = \frac{x-1}{y} \to ydy = (x-1)dx$$

$$\int y = \int (x-1)dx$$

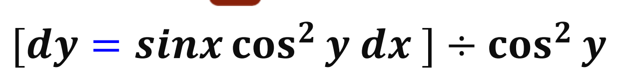
$$\left[\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} - x + c\right].2 \to y^2 = x^2 - 2x + 2c$$

$$y^2 = x^2 - 2x + c1 \to y = \sqrt{x^2 - 2x + c1} = (x^2 - 2x + c1)^{\frac{1}{2}}$$

مثال / حل المعادلة



$dy = sinx\cos^2 y\, dx$ حيث $y \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}, cos \neq 0$



$$[dy = sinx\cos^2 y\, dx] \div \cos^2 y$$

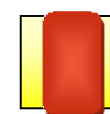




$$\frac{dy}{\cos^2 y}=\frac{\sin\cos^2 y}{\cos^2 y}dx \rightarrow \int\frac{dy}{\cos^2 y}=\int sinxdx$$

$$=\int \sec^2 y=\int sinx\,dx \rightarrow tany=-cosx+c$$





مثال/ اوجد حل المعادلة التفاضلية $y'-x\sqrt{y}=0$ عندما x=2 ,y=9

مادام بالسؤال انطاني قيمة x,y معناه وره التكامل تعوضهم



$$y'-x\sqrt{y}=0$$

$$\frac{dy}{dx}-x\sqrt{y}=0 \rightarrow \frac{dy}{dx}=x\sqrt{y}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{xy^{\frac{1}{2}}}{1} \rightarrow \left[dy=x\,y^{\frac{1}{2}}dx\right]\div y^{\frac{1}{2}} \rightarrow \left[\frac{dy}{y^{\frac{1}{2}}}=\frac{xy^{\frac{1}{2}}dx}{y^{\frac{1}{2}}}\right]$$

$$\frac{dy}{y^{\frac{1}{2}}}=xdx \rightarrow \int y^{\frac{-1}{2}}dy=\int xdx$$

$$\frac{y^{\left(-\frac{1}{2}\right)}}{\frac{1}{2}}=\frac{x^2}{2}+c$$

$$2y^{\frac{1}{2}}=\frac{x^2}{2}+c \qquad [x=2\ ,y=9]$$

$$2(9)^{\frac{1}{2}}=\frac{(2)^2}{2}+c \rightarrow 2\sqrt{9}=\frac{4}{2}+c \rightarrow 2(3)=2+c \rightarrow 6=2+c$$

$$6-2=c \rightarrow c=4$$

$$\therefore \left[2\,y^{\frac{1}{2}}=\frac{x^2}{2}+4\right]\frac{1}{2} \rightarrow y^{\frac{1}{2}}=\frac{x^2}{4}+2$$

$\left[\sqrt{y}=\frac{x^2}{4}+2\right]$ بالتربيع $\rightarrow y=\left(\frac{x^2}{4}+2\right)^2$

مثال / حل المعادلة $\frac{dy}{dx} = e^{2x+y}$ حيث $y=0$ عندما $x=0$

$$\frac{dy}{dx} = e^{2x+y} \rightarrow \frac{dy}{dx} = e^{2x}.e^{y}$$

$$[dy = e^{2x}.e^{y}dx\,] \div e^{y}$$

$$\frac{dy}{e^{y}} = \frac{e^{2x}e^{y}dx}{e^{y}} \rightarrow e^{-y}dy = \int e^{2x}dx$$

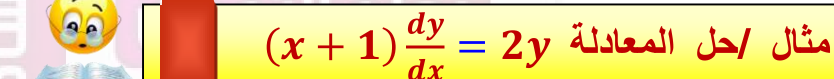
$$-e^{-y} = \frac{1}{2}e^{2x} + c \rightarrow -e^{0} = \frac{1}{2}e^{0} + c \rightarrow -1 = \frac{1}{2} + c \rightarrow -1 - \frac{1}{2} = c$$

$$c = \frac{-3}{2} \rightarrow \left[-e^{-y} = \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{3}{2}\right].(-1)$$

$$e^{-y} = -\frac{1}{2}e^{2x} + \frac{3}{2} \rightarrow \left[\frac{1}{e^{y}} = \frac{3 - e^{2x}}{2}\right]$$ نقلب الطرفين

$$e^{y} = \frac{2}{3 - e^{2x}} \rightarrow \ln e^{y} = \ln\frac{2}{3 - e^{2x}} \rightarrow y = \ln\left|\frac{2}{3 - e^{2x}}\right|$$







$$(x+1)\frac{dy}{dx} = 2y \rightarrow \frac{(x+1)dy}{dx} = \frac{2y}{1}$$

$$[(x+1)dy = 2ydx] \div y(x+1)$$

$$\frac{(x+1)dy}{y(x+1)} = \frac{2y}{y(x+1)}dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2}{x+1}dx \rightarrow \ln|y| = 2\ln|x+1| + \ln c$$

$$\ln|y| = \ln\left|(x+1)^{2}.c\right|$$ باخذ e للطرفين

$$e^{\ln y} = e^{\ln(x+1)^{2}.c}$$

$$y = \mp(x+1)^{2}.c$$



ملاحظة:- اذا جان عدنة lny ونريد نطلع الـ y ناخذ e للطرفين (لان e تلغي الـ ln) وبالعكس

التمارين الخاصة بالموضوع

1- حل المعادلات التفاضلية الاتية بطريقة فصل المتغيرات



$a) y' \cos^3 x = sinx$



$$y' \cos^3 x = sinx \rightarrow \frac{dy}{dx} \cos^3 x = sinx$$

$$[\cos^3 x dy = sinxdx\,] \div \cos^3 x$$

$$\frac{\cos^3 x dy}{\cos^3 x} = \frac{sinx}{\cos^3 x} dx \rightarrow \int dy = \int \cos^{-3} x sinxdx$$

$$y = -\frac{\cos^{-2} x}{-2} + c \rightarrow y = \frac{1}{cos^2 x} + c$$

$b) \frac{dy}{dx} + xy = 3x \quad , \quad x = 1 \quad y = 2$



$$\frac{dy}{dx} + xy = 3x \rightarrow \frac{dy}{dx} = 3x - xy$$

$$dy = (3x - xy)dx$$

$$[dy = x(3 - y)dx] \div (3 - y)$$

$$\frac{dy}{3 - y} = \frac{x(3 - y)}{3 - y} \rightarrow \int \frac{dy}{3 - y} = \int xdx$$



$$-\ln|3 - y| = \frac{x^2}{2} + c$$

$$\because x = 1, y = 2$$

$$-\ln|3 - 2| = \frac{(1)^2}{2} + c$$

$$-\ln|1| = \frac{1}{2} + c \rightarrow 0 = \frac{1}{2} + c \rightarrow c = \frac{-1}{2}$$

$$\left[-\ln|3-y| = \frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\right]$$ (للطرفين e)

$$e^{\ln|3-y|} = e^{-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}}$$

$$|3-y| = \mp e^{\frac{1}{2}-\frac{x^2}{2}} \to 3 \mp e^{\frac{1}{2}-\frac{x^2}{2}} = y$$

$$y = 3 \mp e^{\frac{1}{2}-\frac{x^2}{2}}$$

$c)\ \frac{dy}{dx} = (x+1)(y-1)$



$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x+1)(y-1)}{1} \to [dy = (x+1)(y-1)dx\,] \div (y-1)$$

$$\frac{dy}{y-1} = \frac{((x+1)(y-1))}{y-1}dx$$





$$\int \frac{dy}{y-1} = \int (x+1)dx$$

$$\ln|y-1| = \frac{x^2}{2}+x+c$$ باخذ e للطرفين

$$e^{\ln|y-1|} = e^{\left(\frac{x^2}{2}+x+c\right)}$$

$$y-1 = \mp e^{\frac{x^2}{2}+x+c}$$

$$y-1 = \mp e^{\frac{x^2}{2}+x}.e^{c}$$

$$y-1 = \mp e^{\frac{x^2}{2}+x}.e^{c}$$

$$y = 1 \mp e^{\frac{x^2}{2}+x}.e^{c}$$



d) $(y^2+4y-1)y' = x^2-2x+3$

$$(y^2+4y-1)\frac{dy}{dx} = x^2-2x+3$$

$$\frac{(y^2+4y-1)dy}{dx} = \frac{(x^2-2x+3)}{1}$$

$$\int (y^2+4y-1)dy = \int (x^2-2x+3)dx$$

$$\frac{y^3}{3}+\frac{4y^2}{2}-y = \frac{x^3}{3}-\frac{2x^2}{2}+3x+c$$

$$[\frac{y^3}{3}+2y^2-y = \frac{x^3}{3}-x^2+3x+c\,]$$

$$y^3+6y^2-3y = x^3-3x^2+9x+3c$$

$$y^3+6y^2-3y = x^3-3x^2+9x+c1$$

e) $yy' = 4\sqrt{(1+y^2)^3}$



$$y\frac{dy}{dx} = 4(1+y^2)^{\frac{3}{2}}$$



$$\frac{ydy}{dx} = \frac{4(1+y^2)^{\frac{3}{2}}}{1}$$

$$\left[y\,dy = 4(1+y^2)^{\frac{3}{2}}dx\right] \div (1+y^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{ydy}{(1+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{4(1+y^2)^{\frac{3}{2}}dx}{(1+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\int \frac{ydy}{(1+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \int 4\,dx$$

$$\int y(1+y^2)^{-\frac{3}{2}}dy = \int 4dx$$

$$\frac{\frac{1}{2}(1+y^2)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} = 4x+c \rightarrow \frac{1}{2}.\frac{-2}{1}(1+y^2)^{\frac{-1}{2}} = 4x+c$$

$$\frac{(-1)}{\sqrt{1+y^2}} = 4x+c$$ بالتربيع $\rightarrow \frac{1}{1+y^2} = (4x+c)^2$ قلب الطرفين

$$1 + y^2 = \frac{1}{(4x + c)^2} \rightarrow y^2 = \frac{1}{(4x + c)^2} - 1$$

$$y = \sqrt{\frac{1}{(4x + c)^2} - 1}$$

$f)\ e^x dx - y^3 dy = 0$



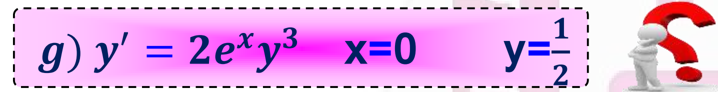


$$e^x dx - y^3 dy = 0 \rightarrow \int e^x dx = \int y^3 dy$$

$$\left[e^x + c = \frac{y^4}{4}\right] . 4$$

$$4e^x + 4c = y^4 \rightarrow 4e^x + c1 = y^4 \rightarrow y^4 = 4e^x + c1$$

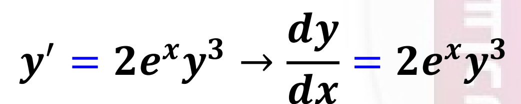
$$y = \mp\sqrt[4]{4e^x + c1}$$



$g)\ y' = 2e^x y^3 \quad x=0 \quad y=\frac{1}{2}$







$$y' = 2e^x y^3 \rightarrow \frac{dy}{dx} = 2e^x y^3$$

$$[dy = 2e^x y^3 dx] \div y^3 \rightarrow \frac{dy}{y^3} = \frac{2e^x y^3}{y^3} dx \rightarrow y^{-3} dy = \int \quad 2e^x dx$$

$$\frac{y^{-2}}{2} = 2e^x + c \rightarrow -\frac{1}{2y^2} = 2e^x + c$$

$$\frac{-1}{2\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 2e^0 + c \rightarrow \frac{-1}{2\left(\frac{1}{4}\right)} = 2 + c$$

$$-1 * \frac{2}{1} = 2 + c \rightarrow -2 = 2 + c \rightarrow c = -4$$

$$\frac{-1}{2y^2} = 2e^x - 4$$ قلب الطرفين



$$\left[-2y^2 = \frac{1}{2e^x - 4}\right] \rightarrow y^2 = \frac{1}{8 - 4e^x} \rightarrow y = \sqrt{\frac{1}{8 - 4e^x}}$$



2- جد الحل العام للمعادلات التفاضلية الاتية :-

$a)xy\frac{dy}{dx} + y^2 = 1 - y^2$



$$xy\frac{dy}{dx} + y^2 = 1 - y^2$$

$$xy\frac{dy}{dx} = 1 - y^2 - y^2$$

$$xy\frac{dy}{dx} = 1 - 2y^2 \rightarrow \frac{xydy}{dx} = \frac{1 - 2y^2}{1}$$

$$[xy\,dy = (1 - 2y^2)dx\,] \div x(1 - 2y^2)$$

$$\frac{xydy}{x(1 - 2y^2)} = \frac{(1 - 2y^2)dx}{x(1 - 2y^2)}$$

$$\int \frac{ydy}{(1 - 2y^2)^2} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{-1}{4}\ln|1 - 2y^2| = \ln|x| + \ln|c| \rightarrow \ln\left|(1 - 2y^2)^{-\frac{1}{4}}\right| = \ln|x.c|$$

باخذ e للطرفين

$$e^{\ln\left|(1-2y^2)^{-\frac{1}{4}}\right|} = e^{\ln|x.c|} \rightarrow (1 - 2y^2)^{-\frac{1}{4}} = \mp xc$$

$$\frac{1}{\sqrt[4]{1 - 2y^2}} = \mp xc \rightarrow \mp cx = \frac{1}{\sqrt[4]{1 - 2y^2}}$$

$b)sinx\cos y\frac{dy}{dx} + cosx\,siny = 0$



$$sinx\cos y\frac{dy}{dx} + cosx\,siny = 0$$



$$sinx\ cosy\frac{dy}{dx} = -cosx\ siny$$

$$[sinx\ cosy\ dy = -cosx\ siny\ dx] \div sinx\ siny$$

$$\frac{sinxcosydy}{sinxsiny} = \frac{-cosx\ siny\ dx}{sinx\ siny} \rightarrow \frac{cosy}{siny}dy = -\frac{cosx}{sinx}dx$$

$$\ln|siny| = -\ln|sinx| + \ln|c|$$

$\ln|siny| + \ln|sinx| = \ln|c|$ باخذ e للطرفين

$$e^{\ln|siny\ sinx|} = e^{\ln|c|}$$

$$siny\ sinx = \mp c$$

$c)\ x\cos^2 ydx + tany\ dy = 0$



$$[tany\ dy = -xcos^2y\ dx] \div \cos^2 y$$



$$\frac{tanydy}{\cos^2 y} = \frac{-xcos^2ydx}{\cos^2 y} \rightarrow \int \frac{tany}{\cos^2 y}dy = \int -x\ dx$$

$$\int \tan y \sec^2 y\ dy = \int -x\ dx$$

$$\left[\frac{\tan^2 y}{2} = \frac{-x^2}{2} + c\right].2$$

$$\tan^2 y = -x^2 + 2c \rightarrow \tan^2 y = -x^2 + c1$$

$d)\tan^2 ydy = \sin^3 xdx$



$$\tan^2 ydy = \sin^3 xdx$$



$$(\sec^2 y - 1)dy = sinx\sin^2 xdx$$

$$(\sec^2 y - 1)dy = sinx(1 - \cos^2 x)dx$$



$$\int(\sec^2 y - 1)dy = \int(sinx - \cos^2 xsinx)dx$$

$$tany - y = -cosx - \frac{\cos^3 x}{3} + c$$

$e)\ \frac{dy}{dx} = \cos^2 x \cos^2 y$

$$\frac{dy}{dx} = \cos^2 x \cos^2 y \rightarrow [dy = \cos^2 x \cos^2 y\, dx] \div \cos^2 y$$

$$\frac{dy}{\cos^2 y} = \frac{\cos^2 x \cos^2 y\, dx}{\cos^2 y} \rightarrow \int \frac{dy}{(\cos^2 y)} = \int \cos^2 xdx$$

$$\int \sec^2 y\, dy = \int \frac{1}{2}(1 + cos2x)dx$$

$$tany = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}sin2x + c\right)$$

$$\left[tany = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}sin2x + \frac{1}{2}c\right].4$$

$$4tany = 2x + sin2x + 2c \rightarrow 4tany = 2x + sin2x + c1$$

$f)\ \frac{dy}{dx} = \frac{cosx}{3y^2 + e^y}$



$$\frac{dy}{dx} = \frac{cosx}{3y^2 + e^y} \rightarrow \int(3y^2 + e^y)dy = \int cosxdx$$



$$\frac{3y^3}{3} + e^y = sinx + c \rightarrow y^3 + e^y = sinx + c$$

$g)\ e^{x+2y} + y' = 0$



$$e^{x+2y} + y' = 0 \rightarrow y' = -e^{x+2y}$$



$$\frac{dy}{dx} = -e^x . e^{2y}$$

$$[dy = -e^x . e^{2y} dx\,] \div e^{2y}$$

$$\frac{dy}{e^{2y}} = \frac{(-e^x e^{2y} dx)}{e^{2y}} \to \frac{dy}{e^{2y}} = -e^x dx \to e^{-2y} dy = -e^x dx$$

$$-\frac{1}{2} e^{-2y} = -e^x + c(-2)$$

$$e^{-2y} = 2e^x - 2c$$

$$e^{-2y} = 2e^x + c1$$

حل المعادلة التفاضلية المتجانسة

نستخدمها من منكدر نستخدم طريقه الفصل (واذا جان xمجموع او مطروح من y)

(زين شلون نعرف المعادلة متجانسة لاحظ)

1-نباوع على مجموع الاسس بكل طرف لازم متساوي زين نطبق مثال وشوف

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3y + y^3x}{3x^3y}$$

$x^3y \to$ x^3y^1 مجموع الاسس $= 3 + 1 = 4$

$y^3x \to$ y^3x^1 مجموع الاسس $= 3 + 1 = 4$

$3x^3y \to$ x^3y^1 مجموع الاسس $= 3 + 1 = 4$

الطريقة اعلاه هي بدلالة المجموع

مادام تساوت الاسس يعني متجانسة

ملاحظة / كل الدوال الدائرية والاسية غير متجانسة الا أذا انكتبت الزاوية مالته بهل صيغة , x/y والاس كذلك



هسه من عرفنة المعادلة المتجانسة طريقة الحل (سهلة جدا)

خطوات الحل :-

1- نكتب المعادلة بالصورة $\frac{dy}{dx} =$

2- نقسم بسط ومقام الطرف الايمن على اعلى اس لل x راح تكون عدنة بهل صوره $\left(\frac{y}{x}\right)^{\text{اس}}$

3- نعوض مكان كل $\frac{y}{x}$ ب v راح تكون عدنة معادلة 1

4- نفرض y=vx ونشتقها $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ راح تكون عدنة معادلة 2

5- نعوض مكان ال $\frac{dy}{dx}$ بمعادلة 1 ب $v + x\frac{dv}{dx}$

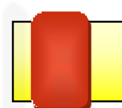
6- ننقل v للطرف الايمن

7- نفصل المتغيرات

8- نكامل الطرفين

9- نعوض $\frac{y}{x}$ مكان كل v





مثال:- حل المعادلة التفاضلية $y' = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}$

$$y' = \frac{(3y^2 - x^2)}{2xy} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{(3y^2 - x^2)}{2xy}$$



نقسم على x^2

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{3y^2 - x^2}{x^2}}{\frac{2xy}{x^2}} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{3y^2}{x^2}\right) - \left(\frac{x^2}{x^2}\right)}{\frac{y}{x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1}{\frac{y}{x}} \quad [v = \frac{y}{x}]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3v^2 - 1}{2v} \ldots\ldots\ldots\ldots 1$$

$$\rightarrow y = vx \rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{3v^2 - 1}{2v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{3v^2 - 1}{2v} - v$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{(3v^2 - 1 - 2v^2)}{2v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{(v^2 - 1)}{2v} \; [\text{نقسم عله } dv]$$

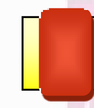
$$\frac{x}{dx} = \frac{v^2 - 1}{2vdv} \; \text{نقلب الطرفين}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{2v}{v^2 - 1}\, dv$$

$$\ln|x| = \ln|v^2 - 1| + \ln|c|$$

$$\ln|x| = \ln|(v^2 - 1) - c| \rightarrow x = \mp(v^2 - 1) - c$$





مثال:- حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = \frac{y+x}{y-x}$



$$\frac{dy}{dx} = \frac{y+x}{y-x} \; [\text{نقسم على } x]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y+x}{x}}{\frac{y-x}{x}} = \frac{\frac{y}{x} + \frac{x}{x}}{\frac{y}{x} - \frac{x}{x}} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x} - 1}{\frac{y}{x} - 1} \left[v = \frac{y}{x}\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v + 1}{v - 1} \ldots\ldots\ldots 1$$

$$y = vx \rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{v + 1}{v - 1}$$



$$x\frac{dv}{dx}=\frac{(v+1)}{v-1}-v \to x\frac{dv}{dx}=\frac{v+1-v^2+v}{v-1}$$

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{-v^2+2v+1}{v-1}$$ [dv نقسم]

$$\frac{x}{dx}=\frac{-v^2+2v+1}{(v-1)dv}$$ [نقلب الطرفين]

$$\frac{dx}{x}=\frac{(v-1)dv}{-v^2+2v+1}$$

$$ln|x|=-\frac{1}{2}ln\left|-v^2+2v+1\right|+ln|c|$$

$$ln|x|=ln\left|(-v^2+2v+1)^{\frac{-1}{2}}.c\right|$$

$$x=\mp(-v^2+2v+1)^{\frac{1}{2}}.c \quad \to x=\mp\frac{c}{\sqrt{-\frac{y^2}{x^2}+2\frac{y}{x}+1}}$$

$$c=\mp x\sqrt{-\frac{y^2}{x^2}+2\frac{y}{x}+1}$$





مثال- حل المعادلة $(3x-y)y'=x+y$



$$(3x-y)\frac{dy}{dx}=x+y \to \frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{3x-y}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{x+y}{x}}{\frac{3x-y}{x}} \to \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{x}{x}+\frac{y}{x}}{\frac{3x}{x}-\frac{y}{x}}\left[v=\frac{y}{x}\right]$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1+v}{3-v}\dots\dots\dots 1$$

$$y=vx \to \frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$$

$$v+x\frac{dv}{dx}=\frac{1+v}{3+v} \to x\frac{dv}{dx}=\frac{1+v}{3-v}-v$$

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{1+v-3v+v^2}{3-v} \to x\frac{dv}{dx}=\frac{1-2v+v^2}{3-v}$$ [dvنقسم]

$$\frac{x}{dx}=\frac{1-2v+v^2}{(3-v)dv}$$ [بقلب الطرفين]

$$\frac{dx}{x}=\frac{(3-v)dv}{1-2v+v^2}$$

$$\frac{dx}{x}=\frac{3-v}{(1-v)^2}dv \to \frac{dx}{x}=\frac{2+1-v}{(1-v)^2}dv \to \frac{dx}{x}=\left[\frac{2}{(1-v)^2}+\frac{1-v}{(1-v)^2}\right]dv$$

$$\int\frac{dx}{x}=\int 2(1-v)^{-2}dv+\int\frac{1}{1-v}dv$$

$$ln|x|=2\frac{(1-v)^{-1}}{-1}+[-ln|1-v|+c$$

$$ln|x|=\frac{2}{1-v}-ln|1-v|+c \to ln|x|=\frac{2}{1-\frac{y}{x}}-ln\left|1-\frac{y}{x}\right|+c$$

$$ln|x|=\frac{2}{\frac{x-y}{x}}-ln\left|\frac{x-y}{x}\right|+c$$

$$ln|x|=\frac{2x}{x-y}-ln\left|\frac{x-y}{x}\right|+c$$

$$ln|x|=\frac{2x}{x-y}-[ln|x-y|-ln|x|]+c$$

$$0=\frac{2x}{x-y}-ln|x-y|+c$$

$$ln|x-y|=\frac{2x}{x-y}+c$$



مثال -جد الحل العام للمعادلة التفاضلية $2x^2\frac{dy}{dx}=x^2+y^2$



$$2x^2\frac{dy}{dx}=x^2+y^2 \to \frac{dy}{dx}=\frac{(x^2+y^2)}{2x^2}\ [\text{نقسم } x^2]$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{x^2+y^2}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}} \to \frac{dy}{dx}=\left(\frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{y^2}{x^2}}{2}\right) \to \frac{dy}{dx}=\frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}{2}\left[v=\frac{y}{x}\right]$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1+v^2}{2} \dots\dots\dots 1$$

$$y=vx \to \frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$$

$$v+x\frac{dv}{dx}=\frac{1+v^2}{2}$$



$$x\frac{dv}{dx}=\frac{1+v^2}{2}-v\rightarrow x\frac{dv}{dx}=\frac{1+v^2-2v}{2}$$

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{v^2-2v+1}{2}\rightarrow x\frac{dv}{dx}=\frac{(v-1)^2}{2}dv$$ نقسم

$$\frac{x}{dx}=\frac{(v-1)^2}{2dv}$$ نقلب الطرفين

$$\frac{dx}{x}=\frac{2dv}{(v-1)^2}\rightarrow\int\frac{dx}{x}=2\int(v-1)^{-2}dv$$

$$ln|x|=2\frac{(v-1)^{-1}}{-1}+c\rightarrow lnx=-\frac{2}{v-1}+c$$

$$lnx-c=-\frac{2}{v-1}\rightarrow lnx+c1=\frac{-2}{v-1}$$

$$[lnx+c1](v-1)=-2$$

التمارين الخاصة بالموضوع

$$2)\ (y^2-xy)dx+x^2dy=0$$

$$x^2dy=(xy-y^2)dx\ ]\div x^2dx$$

$$\frac{x^2dy}{x^2dx}=\frac{(xy-y^2)dx}{x^2dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{xy-y^2}{x^2}x^2$$ نقسم

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{xy-y^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}}\rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{xy}{x^2}-\frac{y^2}{x^2}}{1}\rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}-\left(\frac{y}{x}\right)^2\left[v=\frac{y}{x}\right]$$

$$\frac{dy}{dx}=v-v^2\ \ldots\ldots\ldots\ldots..1$$

$$y=vx\rightarrow\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$$

$$v+x\frac{dv}{dx}=v-v^2$$

$$x\frac{dv}{dx}=v-v^2-v$$

$$x\frac{dv}{dt}=-v^2$$ [dv نقسم]

$$\frac{x}{dx}=\frac{-v^2}{dv}$$ نقلب الطرفين]

$$\int\frac{dx}{x}=\int-\frac{dv}{v^2}\rightarrow\int\frac{dx}{x}=\int -v^2dv$$

$$\ln|x|=\frac{-v^{-1}}{-1}+c\rightarrow\ln|x|=v^{-1}+c\rightarrow\ln|x|=\frac{1}{v}+c$$

$$\ln|x|=\frac{1}{\frac{y}{x}}+c$$

$$\ln|x|-c=\frac{x}{y}\rightarrow x=y(\ln|x|-c)$$

$$y=\frac{x}{\ln|x|-c}\rightarrow y=\frac{x}{\ln|x|+c1}$$

3) $(x+2y)dx+(2x+3y)dy=0$



$[(2x+3y)dy=-(x+2y)dx\,]\div[2x+3y]dx$



$$\frac{[2x+3y]dy}{[2x+3y]dx}=\frac{(-x-2y)dx}{[2x+3y]dx}\rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{-x-2y}{2x+3y}$$ نقسم على x

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\left(\frac{-x-2y}{x}\right)}{\frac{2x+3y}{x}}\rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{-\frac{x}{x}-\frac{2y}{x}}{\frac{2x}{x}+\frac{3y}{x}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-1-2\left(\frac{y}{x}\right)}{2+3\left(\frac{y}{x}\right)}\left[v=\frac{y}{x}\right]$$



$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1-2v}{2+3v} \ldots\ldots\ldots..1$$

$$y = vx \to \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

$$v + x\frac{dy}{dx} = \frac{-1-2v}{2+3v} - v \to x\frac{dv}{dx} = \frac{-1-2v-2v-3v^2}{2+3v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{-1-4v-3v^2}{2+3v}$$ [نقسم dv]

$$\frac{x}{dx} = \frac{-1-4v-3v^2}{(2+3v)dv}$$ نقلب الطرفين

$$\int\frac{dx}{x} = \int\frac{(2+3v)dv}{-1-4v-3v^2}$$

$$ln|x| = -\frac{1}{2}ln|-1-4v-3v^2| + ln|c|$$

$$ln|x| = ln\left|(-1-4v-3v^2)^{-\frac{1}{2}} + ln\right|c|$$

$$ln|x| = ln\left|(-1-4v-3v^2)^{-\frac{1}{2}}.c\right|$$ باخذ الطرفين e

$$x = \mp(-1-4v-3v^2)^{-\frac{1}{2}}.c \to x = \frac{c}{\sqrt{-1-4\left(\frac{y}{x}\right)-3\frac{y^2}{x^2}}}$$

$$c = \mp x\sqrt{-1-4\left(\frac{y}{x}\right)-3\frac{y^2}{x^2}}$$

$$7)\ x\left(\frac{dy}{dx} - tan\frac{y}{x}\right) = y$$



$$\left[x\left(\frac{dy}{dx} - tan\frac{y}{x}\right) = y\right]$$ نقسم x

$$\frac{dy}{dx} - tan\frac{y}{x} = \frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\tan\frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx}=v+\tan v \ldots\ldots\ldots 1$$

$$y=vx\to\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$$

$$v+x\frac{dv}{dx}=v+\tan v$$

$$x\frac{dv}{dx}=v+\tan v-v\ \to x\frac{dv}{dx}=\tan v$$ [نقسم dv]

$$\frac{x}{dx}=\frac{\tan v}{dv}$$ [نقلب الطرفين]

$$\frac{dx}{x}=\frac{dv}{\tan v}\to\frac{dx}{x}=\frac{dv}{\frac{\sin v}{\cos v}}\to\frac{dx}{x}=\frac{\cos v}{\sin v}dv$$

$$\ln|x|=\ln|\sin v|+\ln|c|$$

$$\ln|x|=\ln|(\sin v).c|$$ باخذ e الطرفين

$$x=\mp(\sin v.c)\to c=\mp\frac{x}{\sin v}\to c=\frac{x}{\sin\frac{y}{x}}$$

تمرين(1,4,5,6) واجب (اختبر نفسك)



الخصوصي في الرياضيات الفصل السادس

الهندسة الفضائية

مبرهنات | تمارين | حلول جميع الاسئلة العامة في نهاية الكتاب

07828808092



[6-2] الزاوية الزوجية والمستويات المتعامدة.

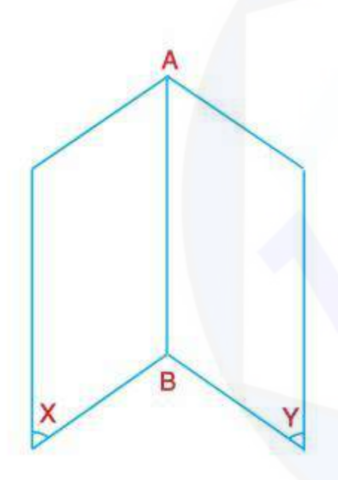
تعـــريــف [6-1]

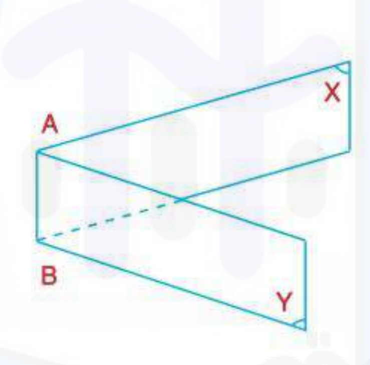
الزاوية الزوجية : اتحاد نصفي مستويين لهما حافة (**Edge**) مشتركة .

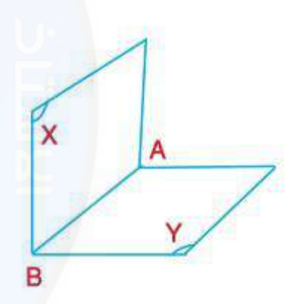
تسمى الحافة المشتركة بـ(حرف االزاوية الزوجية **Edge of Dihedral**) ويسمى كل من نصفي المستويين بـ(وجه الزاوية الزوجية) كما في الشكل (**6-1**)

تعريف اخر

الزاوية الزوجية :هي الزاوية المحصورة بين مستويين وكل مستوي يمثل وجه من وجهي الزاوية ويسمى مستقيم التقاطع حرف الزاوية





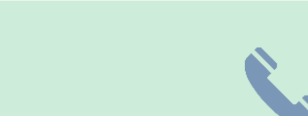


لو ..رأى الكافر عيناها ....لــ قال امنا برب تلك العيون

الاستاذ: حمزه حازم الكربلائي

الاستاذ حمـــزه الكربلائي

07828808092



حيث $\overleftrightarrow{AB}$ هو حرف الزاوية الزوجية ، (X) و (Y) هما وجهاها

ويعبر عن الزاوية الزوجية بالتعبير : $(X) - \overleftrightarrow{AB} - (Y)$

وقد يعبر عنها بحرف الزاوية الزوجية ان لم يكن مشتركاً مع زاوية اخرى .

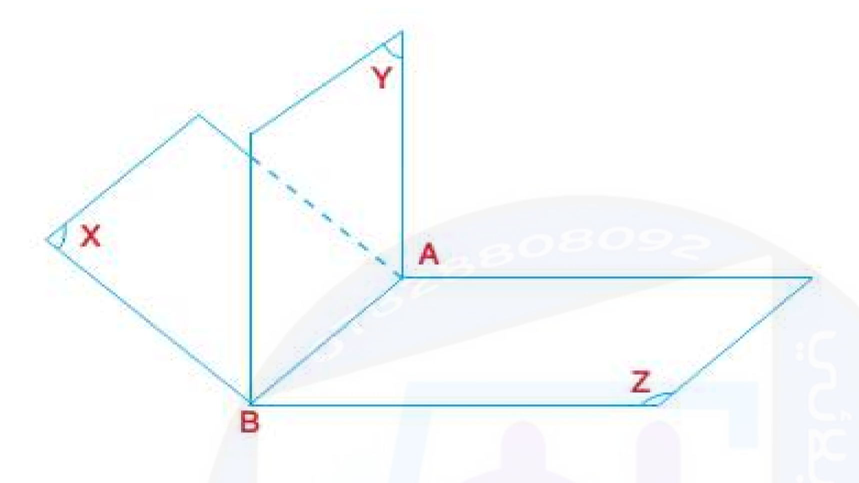
مثلاً :

الزاوية الزوجية

$(X) - \overleftrightarrow{AB} - (Z)$

$(X) - \overleftrightarrow{AB} - (Y)$

$(Y) - \overleftrightarrow{AB} - (Z)$

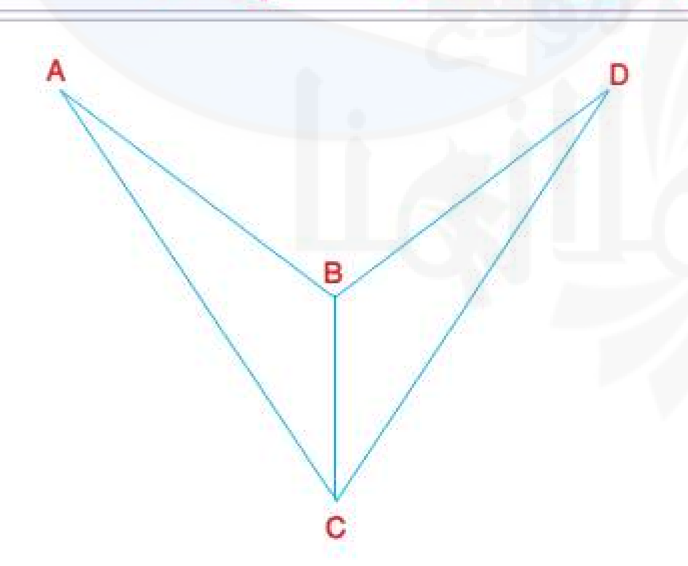


الشكل (2-6)

ولا يمكن ان تكتب الزاوية الزوجية بشكل $\overleftrightarrow{AB}$ في هذا المثال لأن الحرف $\overleftrightarrow{AB}$ مشترك في اكثر من زاوية زوجية.



عندما تكون اربع نقاط ليست في مستوٍ واحد، نكتب الزاوية الزوجية $A - \overleftrightarrow{BC} - D$ او الزاوية الزوجية بين المستويين (ABC) , (DBC) . كما في الشكل



الاستاذ: حمزه حازم الكربلائي
07828808092

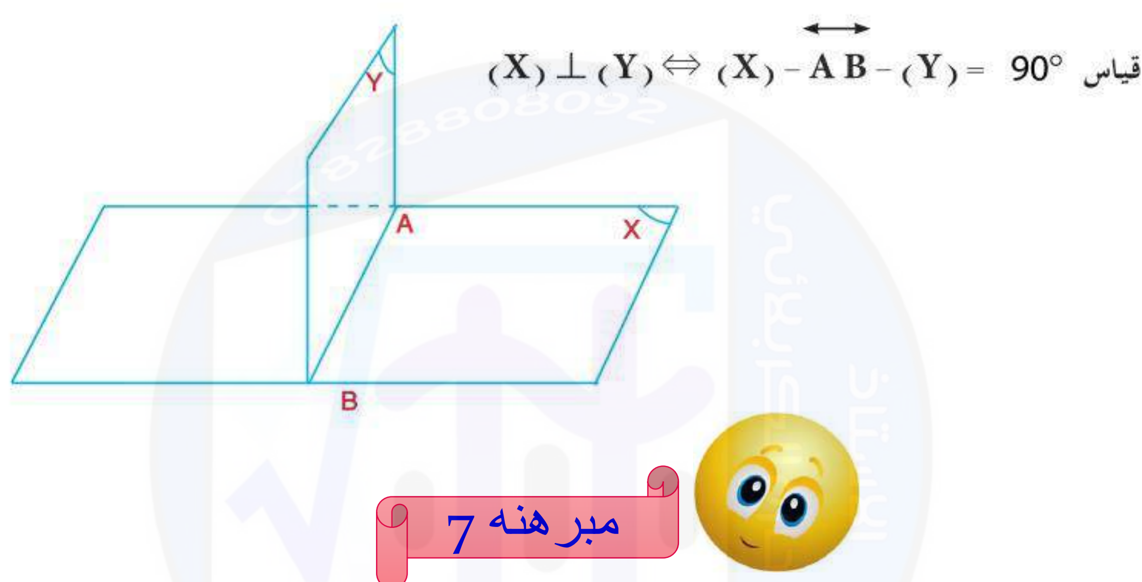
الزاويه العائدة للزاوية الزوجية :-هي الزاوية التي ضلعاها عموديان على حرف الزاوية الزوجية من نقطة لا تنتمي اليه وكل ضلع من اضلاعها في احد وجهي الزاوية الزوجية

نستنتج :-

الاستاذ حمزه الكربلائي

1) قياس الزاوية العائدة لزاوية زوجية ثابت

2)قياس الزاوية الزوجية يساوي قياس الزاوية العائدة لها وبالعكس



الاستاذ:-حمزه حازم الكربلائي

مبرهنه 7

اذا تعامد مستويان فالمستقيم المرسوم من احدهما والعمودي على مستقيم التقاطع يكون عموديا على المستوي الاخر

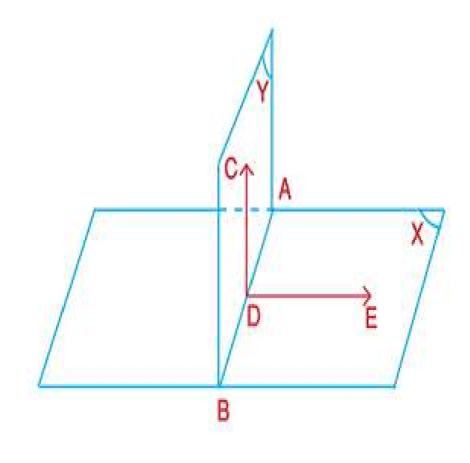
ويمكن ان تاتي بالتعبير الاتي

اذا كان $(X) \cap (Y) = \overline{AB}\ , (X) \perp (Y)$

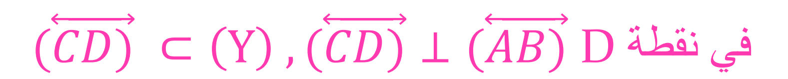
$\overleftrightarrow{CD} \subset (Y)\ , \overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AB}$

في D

فان $\overleftrightarrow{CD} \subset (X)$



المعطيات


في نقطة D $\overleftrightarrow{CD} \subset (Y)\ , \overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AB}$



07828808092

$(Y) \perp (X) \quad , (X) \cap (Y) = \overline{AB}$

البرهان

نرسم $\overline{DE} \perp \overline{AB}$ $\overleftrightarrow{(DE)} \subset (X)$ (في المستوى الواحد يمكن رسم مستقيم وحيد على مستقيم فية من نقطة معلومة)

$\overleftrightarrow{(CD)} \subset (Y) , \overleftrightarrow{(CD)} \perp \overleftrightarrow{(AB)}$ (معطى)

:.CDE ∡ عائدة للزاوية الزوجية $(Y) - \overleftrightarrow{(AB)}$ -(X) ((تعريف الزاوية العائدة)) يذكر التعريف

$(Y) \perp (X)$ ((معطى))

:.قياس الزوجية $90^0 = (Y) - \overleftrightarrow{(AB)}$ -(X) ((اذا تعامد مستويان فالزاوية الزوجية قائمة))

$M\measuredangle$CDE=90 ((قياس الزاوية الزوجية يساوي قياس العائدة لها وبالعكس))

:. $\overleftrightarrow{(AB)} \perp \overleftrightarrow{(CD)}$, ((اذا كان قياس الزاوية بين مستقيمين 90 فان المستقيمين متعامدان وبالعكس وبما ان $\overleftrightarrow{(AB)} \perp \overleftrightarrow{(CD)}$, (معطى)

:.$X \perp \overleftrightarrow{(CD)}$, ((المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عموديا على لاخر مستويهما))

و .هـ. م

قطع قلبة بؤرة العين .....فكيف لاينتمي لمحور القلب

الاستاذ:-حمزه حازم الكربلائي

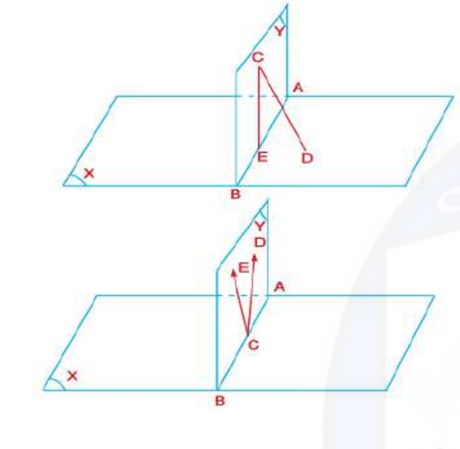


07828808092

نتيجة مبرهنة7

اذا تعامد مستويان فالمستقيم المرسوم من نقطة في احدهما عموديا على المستوى الاخر يكون محتوى فية

بتعبير اخر :-$\overleftrightarrow{(CD)} \subset (Y)$,$(Y) \perp (X) \rightarrow$, $C \in (Y)$, $\overleftrightarrow{(CD)} \perp X$,



المعطيات :- $C \in (Y)$, $(Y) \perp (X)$, $\overleftrightarrow{(CD)} \perp X$,

المطلوب اثابتة :-$\overleftrightarrow{(CD)} \subset (Y)$

البرهان

$(X) \cap (Y) = \overline{AB}$ ((يتقاطع المستويان بمستقيم))

ان لم يكن $\overleftrightarrow{(CD)} \subset (Y)$

من نقطة C نرسم $\overleftrightarrow{(CE)} \subset (Y)$ بحيث $\overleftrightarrow{(CE)} \perp \overleftrightarrow{(AB)}$, ((في المستوى الواحد يوجد مستقيم وحيد عمودي على مستقيم معلوم من نقطة معلومة))

وبما ان $(Y) \perp (X)$ معطى

.: $\overleftrightarrow{(CE)} \perp X$, ((اذا تعامد مستويان فالمستقيم المرسوم في احدهما والعمودي على خط التقاطع يكون عموديا على المستوى الاخر)

ولكن $\overleftrightarrow{(CD)} \perp X$, ((معطى))

.: $\overleftrightarrow{(CE)} = \overleftrightarrow{(CD)}$ يوجد مستقيم وحيد على مستوى معلوم من نقطة معلومه

وبما ان $\overleftrightarrow{(CE)} \subset (Y)$

$\overleftrightarrow{(CD)} \subset (Y)$.:

و.هــ. م

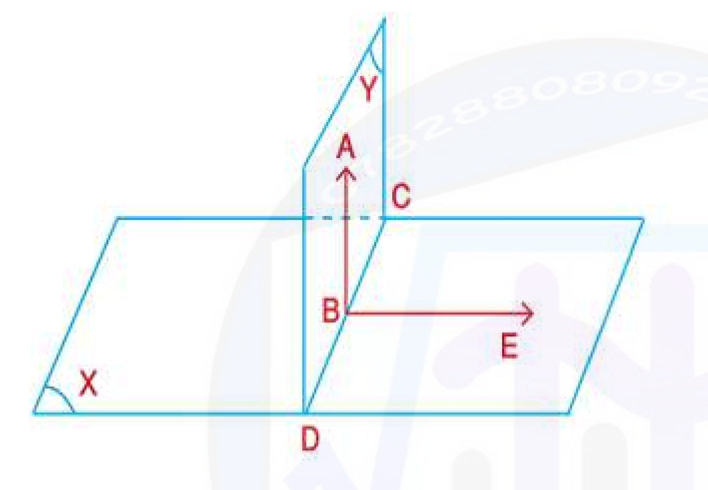




كل مستو مار بمستقيم عمودي على مستوى اخر يكون عموديا على ذلك المستوى

بعباره اخرى :-يتعامد المستويان اذا احتوى احدهما على مستقيم عمودي اخر

بعباره اخرى:- $\overleftrightarrow{AB} \perp (X) \quad , \; \overleftrightarrow{AB} \subset (Y) \rightarrow (Y) \perp (X)$



المعطيات:

$\overleftrightarrow{AB} \perp (X)$

$\overleftrightarrow{AB} \subset (Y)$

المطلوب اثباته $(Y) \perp (X)$

البرهان

ليكن $(X) \cap (Y)$ ((يتقاطع المستويان بخط مستقيم))

ليكن $B \in \overline{CD}$ (مستقيم التقاطع يحتوي النقاط المشتركة))

نرسم $\overline{BE} \in \overline{CD}$ $\quad \overline{BE} \subset (x)$ ((في المستوى الواحد يوجد مستقيم وحيد عمودي على مستقيم فية من نقطة معلومة))

بما ان $(X) \perp \overleftrightarrow{AB}$ ((معطى))

$\overleftrightarrow{BE}$ $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}$ ((المستقيم العمودي على مستوى يكون عموديا على جميع المستقيمات المحتواة في المستوى والمار من اثره)).

بما ان $\overleftrightarrow{AB} \subset (Y)$ ((معطى))



$\therefore \sphericalangle ABE$ عائدة للزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{CD}$ (تعريف الزاوية العائدة)

$m \sphericalangle ABE = 90^\circ$ (لان $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BE}$)

$\therefore$ قياس الزاوية الزوجية $(Y)-\overleftrightarrow{CD}-(X) = 90^\circ$ (قياس الزاوية الزوجية يساوي قياس الزاوية العائدة لها وبالعكس)

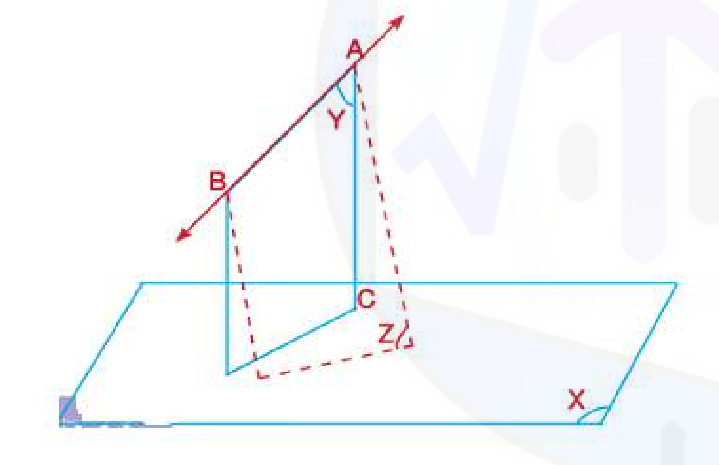
$\therefore (Y) \perp (X)$ (اذا كان قياس الزاوية الزوجية 90 فان المستويين متعامدان وبالعكس)

و . هـ . م

مبرهنة 9

من مستقيم غير عمودي على مستو معلوم يوجد وحيد عمودي على المستوى المعلوم

بعبارة اخرى $\overline{AB}$ غير عمودي على (X) فيوجد مستو وحيد يحتوي $\overline{AB}$ وعمودي على (X)



المعطيات :- $\overline{AB}$ غير عمودي على (X)

المطلوب اثباتة :-

ايجاد مستو وحيد يحوي:- $\overline{AB}$ وعمودي على (X)

البرهان :-

من نقطة A نرسم $\overleftrightarrow{AC} \perp (X)$ ((يوجد مستقيم وحيد عمودي على مستو معلوم من نقطة لاتنتمي الية))

بما ان $\overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{AB}$ متقاطعان

$\therefore$ يوجد مستو مثل Y يحويهما (لكل مستقيمين متقاطعين يوجد مستو وحيد يحويهما))

$\therefore (Y) \perp (X)$ (مبرهنة 8) ((يذكر المنطوق))

ولبرهنة الوحدانية :-

الاستاذ:-حمزه حازم الكربلائي





07828808092

ليكن Z مستوى اخر يحوي $\overleftrightarrow{AB}$ وعمودي على (X)

بما ان $(X) \perp \overleftrightarrow{AC}$ (بالبرهان)

.: $(Z) \supset \overleftrightarrow{AC}$ ((نتيجة مبرهنة 7)) ((يذكر المنطوق))

.: (Z)=(Y) (لكل مستقيم متقاطعين يوجد مستوى وحيد يحويهما))

و.هــ.م

نتيجة مبرهنة 9

اذا كان كل من مستوى متقاطعين عموديا على مستوى ثالث فان مستقيم تقاطعيهما يكون عموديا على المستوى الثالث

المعطيات : $(X) \cap (Y) = \overleftrightarrow{AB}$

$(X), (Y) \perp (Z)$

المطلوب اثباتة :- $\overleftrightarrow{AB} \perp (Z)$

البرهان :-ان لم يكن $\overleftrightarrow{AB}$ عموديا على (Z)

.: اصبح كل من (X),(Y) يحتويان $\overleftrightarrow{AB}$ عموديان على Z

وهذا غي ممكن {حسب مبرهنه 9}

.: $\overleftrightarrow{AB} \perp (Z)$

و .هــ. م

من المستحيل ان تكون رياضيا .....بدون ان تكون شاعراً في الاعماق

الاستاذ:-حمزه حازم الكربلائي

07828808092

مثال - 1-

في $\triangle ABC$

$\overline{BD} \perp (ABC)$ ، $m\measuredangle A = 30^\circ$

$AB = 10\ cm$ ، $BD = 5cm$

جد قياس الزاوية الزوجية $D - \overline{AC} - B$

المعطيات:

$\overline{BD} \perp (ABC),\ m\measuredangle BAC = 30^\circ$, AB =10 cm, BD = 5 cm

المطلوب اثباته:

ايجاد قياس الزاوية الزوجية $D - \overline{AC} - B$

البرهان:

في المستوي (ABC) نرسم $\overline{BE} \perp \overline{AC}$ في نقطة E (في المستوي الواحد يوجد مستقيم وحيد عمودي على آخر من نقطة معلومة)

$\because \overline{BD} \perp (ABC)$ (معطى)

$\therefore \overline{DE} \perp \overline{AC}$ (مبرهنة الاعمدة الثلاثة)

$\Leftarrow \measuredangle DEB$ عائدة للزاوية الزوجية $\overline{AC}$ (تعريف الزاوية العائدة)

$\overline{DB} \perp \overline{BE}$ (المستقيم العمودي على مستوي يكون عموديا على جميع المستقيمات المحتواة في المستوي والمارة من اثره)

$\Leftarrow \triangle DBE$ قائم الزاوية في B



في $\triangle$ BEA القائم الزاوية في E

$$\sin 30^\circ = \frac{BE}{BA} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{BE}{10} \Rightarrow BE = 5cm$$

في $\triangle$ DBE القائم الزاوية في B:

$$\tan(BED) = \frac{5}{5} = 1$$

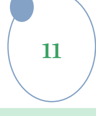
$\therefore$ قياس $m\measuredangle BED = 45^\circ$

$\therefore$ قياس الزاوية الزوجية $D-\overline{AC}-B = 45^\circ$ (قياس الزاوية الزوجية هو قياس الزاوية العائدة لها وبالعكس)

و.هـ.م







07828808092

مثال – 2 –

ليكن ABC مثلثاً وليكن

$\overline{AF} \perp (ABC)$

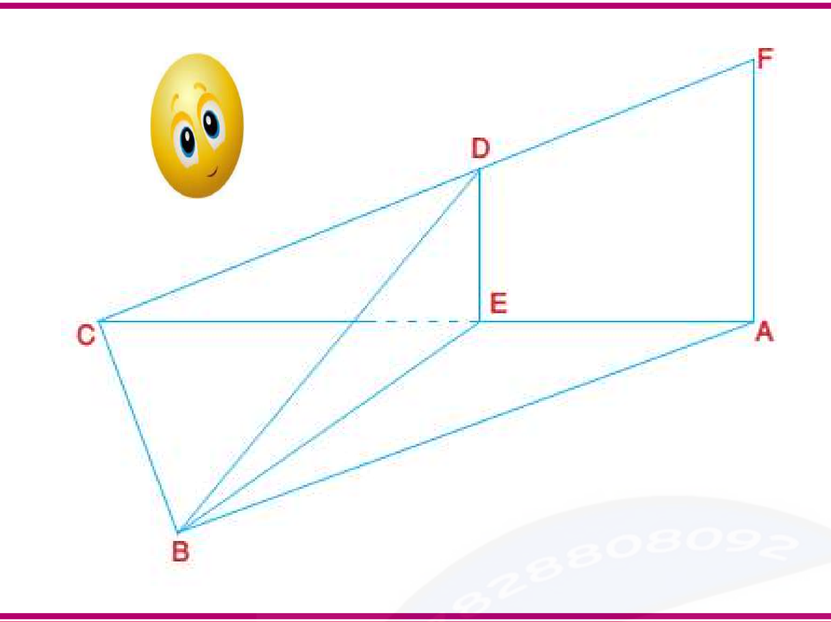
$\overline{BD} \perp \overline{CF}$

$\overline{BE} \perp \overline{CA}$

برهن ان:

$\overline{BE} \perp (CAF)$

$\overline{ED} \perp \overline{CF}$



الاستاذ:-حمزه حازم الكربلائي

المعطيات :

$\overline{AF} \perp (ABC), \overline{BE} \perp \overline{CA}, \overline{BD} \perp \overline{CF}$

المطلوب اثباته:

$\overline{DE} \perp \overline{CF}, \overline{BE} \perp (CAF)$

البرهان:

$\because \overline{AF} \perp (ABC)$ (معطى)

$\therefore (CAF) \perp (ABC)$ (مبرهنة 8 :يتعامد المستويان اذا احتوى احدهما على مستقيم عمودي على الآخر)

$\because \overline{BE} \perp \overline{CA}$ (معطى)

$\therefore \overline{BE} \perp (CAF)$ (مبرهنة 7 : اذا تعامد مستويان فالمستقيم المرسوم في احدهما والعمودي على مستقيم التقاطع يكون عمودياً على الآخر)

$\because \overline{BD} \perp \overline{CF}$ (معطى)

$\therefore \overline{ED} \perp \overline{CF}$ (نتيجة مبرهنة الاعمدة الثلاثة)

و.هـ.م

07828808092



مثال – 3-

$(X),(Y)$ مستويان متعامدان

$\overleftrightarrow{AB} \subset (X)$

$\overleftrightarrow{BD}, \overleftrightarrow{BC}$ عموديان على $\overleftrightarrow{AB}$

ويقطعان (Y) في C,D على الترتيب

برهن ان:

$\overleftrightarrow{CD} \perp (X)$

المعطيات :

إن $(Y) \perp (X)$ ، $\overleftrightarrow{AB} \subset (X)$ ، $\overleftrightarrow{BD}$, $\overleftrightarrow{BC}$ عموديين على $\overleftrightarrow{AB}$ ويقطعان (Y) في C,D على الترتيب

المطلوب اثباته:

$\overleftrightarrow{CD} \perp (X)$

البرهان :

ليكن (Z) مستوي المستقيمين المتقاطعين $\overleftrightarrow{BD}$, $\overleftrightarrow{BC}$ (لكل مستقيمين متقاطعين يوجد مستوياً وحيداً يحويهما)

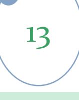
بما ان $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{BD}$ (معطى)

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp (Z)$

(المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عمودياً على مستويهما)

الاستاذ: حمزه حازم الكربلائي

الاستاذ حمـــزه الكربلائي



07828808092

$\because \overleftrightarrow{AB} \subset (X)$ (معطى)

$\therefore (X) \perp (Z)$ (يتعامد المستويان اذا احتوى احدهما على مستقيم عمودي على الآخر)

$\because (X) \perp (Y)$ (معطى)

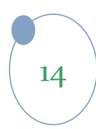
ولما كان $\overleftrightarrow{CD} = (Y) \cap (Z)$ (لانه محتوى في كل منهما)

$\therefore \overleftrightarrow{CD} \perp (X)$

(اذا كان كل من مستويين متقاطعين عمودياً على مستوٍ ثالث فان مستقيم تقاطعهما يكون عمودياً على المستوي الثالث)

و.هـ.م

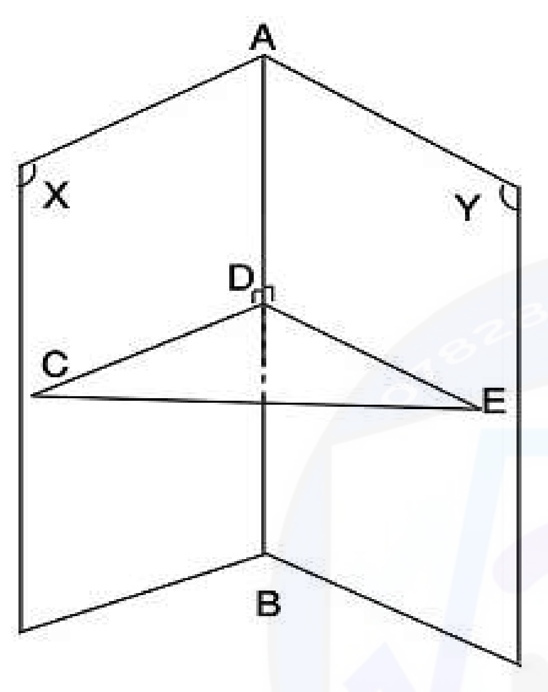




07828808092

تمارين (1-6)

Q1\برهن ان مستوى الزاوية المستوية العائدة لزاوية زوجية يكون عموديا على حرفها



المعطيات :

CDE زاوية عائدة للزاوية الزوجية

$(X)-\overleftrightarrow{AB}-(Y)$

المطلوب : $(CDE)\perp\overleftrightarrow{AB}$



البرهان :

$\overleftrightarrow{CD}\perp\overleftrightarrow{AB}$

$\overleftrightarrow{ED}\perp\overleftrightarrow{AB}$ (تعريف الزاوية العائدة)

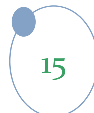
$\therefore (CDE)\perp\overleftrightarrow{AB}$

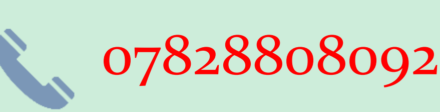
(المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عمودياً على مستويهما)

(و.هـ.م.)

الاستاذ:-حمزه حازم الكربلائي

الاستاذ حمـــزه الكربلائي





07828808092

Q2\برهن انة اذا وازى مستقيم مستويا وكان عموديا على مستوى اخر فان المستويين متعامدان.

المعطيات : $\overleftrightarrow{AB} // (X)$

$\overleftrightarrow{AB} \perp (Y)$

المطلوب : $(X) \perp (Y)$

شكلنة

البرهان : لتكن $C \in (X)$

نرسم $\overleftrightarrow{CD} \perp (Y)$

(يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستوٍ معلوم من نقطة معلومة)

$\because \overleftrightarrow{AB} \perp (Y)$ (معطى) $\Rightarrow \overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$

(المستقيمان العموديان على مستوٍ واحد متوازيان)

$\because C \in (X) \Rightarrow \overleftrightarrow{CD} \subset (X)$

اذا وازى مستقيم مستوياً فالمستقيم المرسوم من نقطة من نقط المستوي موازياً للمستقيم المعلوم يكون محتوى في المستوي)

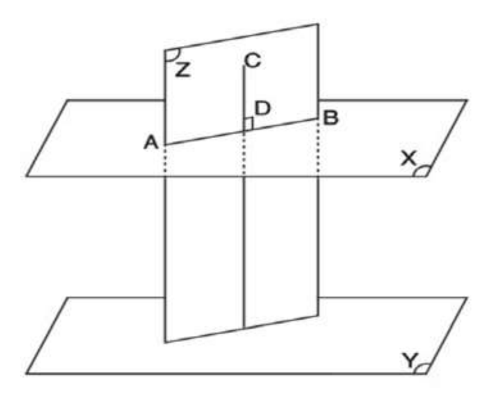
$\therefore (X) \perp (Y)$ (مبرهنة 8)

و.هــ,م

الاستاذ:-حمزه حازم الكربلائي

07828808092

Q3\برهن ان المستوى العمودي على احد مستوين متوازيين يكون عموديا على الاخر ايضا



المعطيات : $(X)//(Y),(Z)\perp(X)$

المطلوب : $(Z)\perp(Y)$

البرهان : ليكن $\overleftrightarrow{AB}=(Z)\cap(X)$ (اذا تقاطع مستويان فان المجموعة التقاطع مستقيم)

لتكن $C\in(Z)$ ، نرسم $\overleftrightarrow{CD}\subset(Z)$ بحيث $\overleftrightarrow{CD}\perp\overleftrightarrow{AB}$

(في المستوي الواحد : يمكن رسم مستقيم واحد فقط عمودي على مستقيم معلوم من نقطة معلومة)

(مبرهنه 7) $\overleftrightarrow{CD}\perp(X)$ ⇐ (معطى) $\because(Z)\perp(X)$

$\overleftrightarrow{CD}\perp(Y)$ ⇐ (معطى) $\because(X)//(Y)$

(المستقيم العمود على احد مستويين متوازيين يكون عمودياً على الآخر)

(مبرهنه 8) $\therefore(Z)\perp(Y)$

(و.هـ.م.)



07828808092

س4: A,B,C,D اربع نقاط ليست في مستوٍ واحد بحيث $E \in \overline{BC}, AB = AC$

فأذا كانت $\measuredangle AED$ عائدة للزاوية الزوجية $A - \overline{BC} - D$ برهن ان $CD = BD$.

A
E
B
C
D

شراح يفهمهم

المعطيات: A,B,C,D أربع نقاط ليست في مستوٍ واحد

$E \in \overline{BC}, AB = AC$

$\measuredangle AED$ عائدة للزاوية الزوجية $A - \overline{BC} - D$

المطلوب: $CD = BD$

البرهان: في ΔABC $\quad AB = AC$ (معطى)

$\because \overline{AE} \perp \overline{BC}$ (تعريف العائدة)

$\therefore E$ منتصف $\overline{BC}$

(العمود المرسوم من رأس مثلث متساوي الساقين على القاعدة ينصفها)

في المثلثين CED, BED

$\overline{DE}$ (مشترك)

$CE = BE$ (بالبرهان)

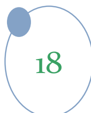
$\measuredangle BED = \measuredangle CED$ قوائم (تعريف العائدة)

$\therefore$ يتطابق المثلثان (لتساوي ضلعين والزاوية المحصورة بينهما)

وينتج $CD = BD$ (و.هـ.م.)

الاستاذ حمـــزه الكربلائي

الاستاذ: حمزه حازم الكربلائي





07828808092

Q5\برهن انة اذا وازى كل من مستقيمين متقاطعين مستويا معلوما وكانا عموديين على مستويين متقاطعين فان مستقيم تقاطع المستويين المتقاطعين يكون عموديا على المستوى المعلوم

A

مو دكول رسم

المعطيات :

$\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{AC} // (Z)$

$\overleftrightarrow{AB} \perp (X), \overleftrightarrow{AC} \perp (Y), (X) \cap (Y) = \overleftrightarrow{DE}$

المطلوب :

$\overleftrightarrow{DE} \perp (Z)$

البرهان :

$\because \overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{AC}$ متقاطعان

∴ يوجد مستوٍ وحيد مثل (F) يحويهما (لكل مستقيمين متقاطعين يوجد مستوٍ وحيد يحويهما)

$\therefore (F) // (Z)$

(اذا وازى كل من مستقيمين متقاطعين مستوياً فان مستوٍ يهما يوازي ذلك المستوي)

$\because \overleftrightarrow{AB} \perp (X)$ (معطى) $\Rightarrow (F) \perp (X)$

مبرهنة (8)

$\because \overleftrightarrow{AC} \perp (Y)$ (معطى) $\Rightarrow (F) \perp (Y)$

$\therefore \overleftrightarrow{DE} \perp (F)$ (نتيجة مبرهنة 8)

$\therefore \overleftrightarrow{DE} \perp (Z)$

(المستقيم العمودي على احد مستويين متوازيين يكون عمودياً على الاخر)

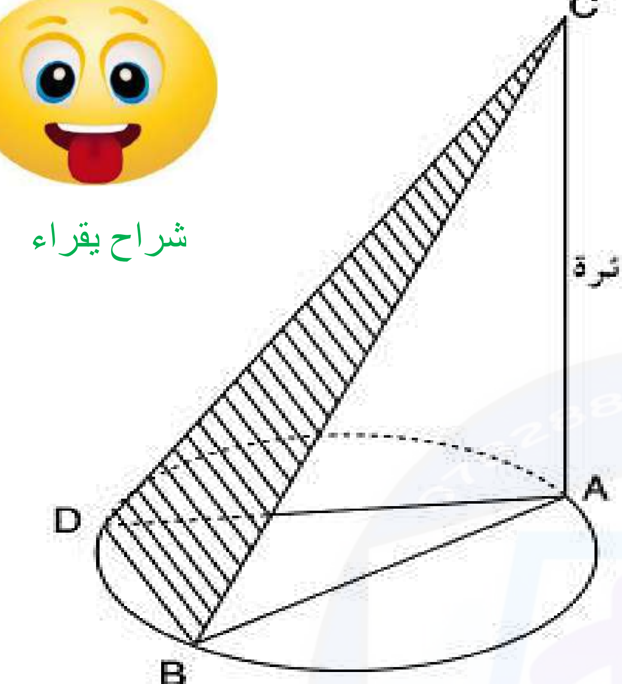
(و.هـ.م.)

الاستاذ: حمزه حازم الكربلائي



07828808092

س6 :دائرة قطرها $\overline{AB}$ ، $\overline{AC}$ عمودي على مستويها ، D نقطة تنتمي للدائرة . برهن ان (CDA) عمودي على (CDB) .



شراح يقراء

المعطيات : دائرة قطرها $\overline{AB}$

$\overline{AC}$ عمودي على مستويها ، D نقطة تنتمي للدائرة

المطلوب : $(CDA) \perp (CDB)$

البرهان :

$\because \overline{AB}$ قطر الدائرة (معطى)

$\therefore \measuredangle ADB = 90^{0}$

(الزاوية المحيطية المرسومة في نصف دائرة قائمة)

$\because \overline{AC} \perp (ADB)$ (معطى)

$\overline{AD} \perp \overline{DB}$ بالبرهان

$\therefore \overline{CD} \perp \overline{DB}$ (مبرهنة الاعمدة الثلاثة)

$\therefore \overline{DB} \perp (CDA)$

(المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عمودياً على مستويهما)

$\therefore (CDA) \perp (CDB)$ (مبرهنة 8)

(و.هـ.م.)

الاستاذ:-حمزه حازم الكربلائي

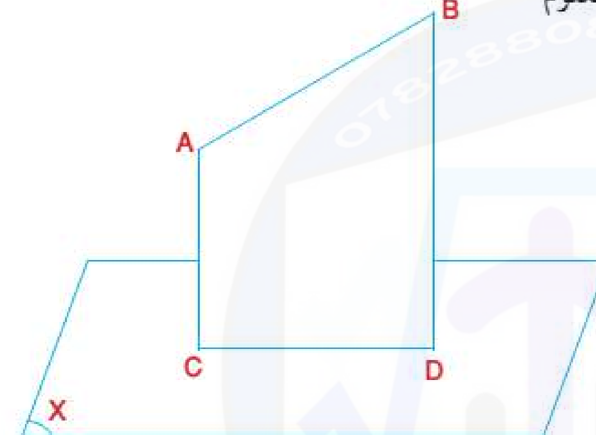
07828808092

(6-3) الاسقاط العمودي على مستوٍ
The Orthogonal Projection on a Plane

1) مسقط نقطة على مستوٍ: هو أثر العمود المرسوم من تلك النقطة على المستوي.

2) مسقط مجموعة نقط على مستوي: لتكن L مجموعة من نقاط في الفراغ فان مسقطها هو مجموعة كل اثار الاعمدة المرسومة من نقاطه على المستوي .

3) مسقط قطعة مستقيم غير عمودية على مستوٍ معلوم: هو قطعة المستقيم المحددة بأثري العمودين المرسومين من نهايتي القطعة على المستوي المعلوم



ليكن $\overline{AB}$ غير عمودي على (X) وليكن

$\overline{AC} \perp (X) \Leftarrow$ مسقط A على (X) هو C

$\overline{BD} \perp (X) \Leftarrow$ مسقط B على (X) هو D

$\therefore$ مسقط $\overline{AB}$ على (X) هو $\overline{CD}$



اذا كان $\overline{AB} \parallel (X)$

فان $AB = CD$

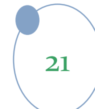
4) المستقيم المائل (Inclined Line) على مستوٍ: هو المستقيم غير العمودي على المستوي وقاطع له

5) زاوية الميل (Angle of Inclination): هي الزاوية المحددة بالمائل ومسقطه على المستوي.

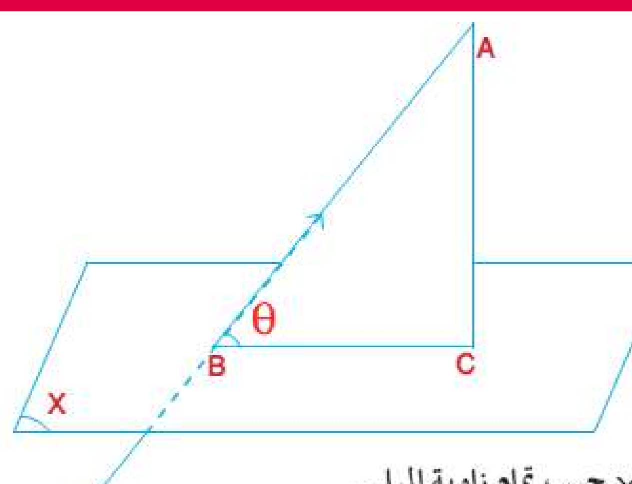
ليكن $\overleftrightarrow{AB}$ مائلاً على (X) في B

وليكن $\overline{AC} \perp (X)$ في C

الاستاذ: حمزه حازم الكربلائي



07828808092



$\therefore$ C مسقط A على (X) حيث $A \notin (X)$

كذلك B مسقط نفسها حيث $B \in (X)$

$\Leftarrow \overline{BC}$ مسقط $\overline{AB}$ على (X)

اي ان $0 < \theta < 90^\circ$

$\theta \in (0, 90^\circ)$

6) طول المسقط

طول مسقط قطعة مستقيم على مستوٍ = طول المائل × جيب تمام زاوية الميل .

فعندما تكون $\overline{AB}$ مائلاً على (X) وزاوية ميله θ ومسقطه $\overline{BC}$ فان $BC = AB\cos\theta$

7) مسقط مستوي مائل(Inclined Plane) على (X)

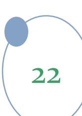
زاوية ميل مستوٍ على مستوٍ معلوم هو قياس الزاوية المستوية العائدة للزاوية الزوجية بينهما

مساحة مسقط منطقة مائلة على مستوٍ معلوم = مساحة المنطقة المائلة ×جيب تمام زاوية الميل

لتكن A مساحة المنطقة المائلة ، A' مساحة المسقط ، θ قياس زاوية الميل $A' = A.\cos\theta$



الاستاذ:-حمزه حازم الكربلائي




07828808092



مثال – 4 –

اذا وازى احد ضلعي زاوية قائمة مستوياً معلوماً فان مسقطي ضلعيها على المستوي متعامدان.

سوال هذا لو تهديد

المعطيات:

ABC زاوية قائمة في B

$\overline{AB} // (X)$ ،

$\overline{A'B'}$ هو مسقط $\overline{AB}$ على (X)

$\overline{B'C'}$ هو مسقط $\overline{BC}$ على (X)

المطلوب اثباته:

$\overline{A'B'} \perp \overline{B'C'}$

البرهان:

$\left.\begin{array}{l} \overline{A'B'} \text{ مسقط } \overline{AB} \\ \overline{B'C'} \text{ مسقط } \overline{BC} \end{array}\right\}$ معطى

$\Leftarrow \overline{AA'}, \overline{BB'}, \overline{CC'} \perp (X)$ (مسقط قطعة مستقيم على مستوٍ معلوم هو القطعة المحددة بأثري العمودين المرسومين على المستوي من طرفي القطعة المستقيمة).

$\overline{AA'} // \overline{BB'}$ ، $\overline{BB'} // \overline{CC'}$ (المستقيمان العموديان على مستوٍ واحد متوازيان)

بالمستقيمين المتوازيين BB' ، AA' نعين (Y)

بالمستقيمين المتوازيين CC' ، BB' نعين (Z)

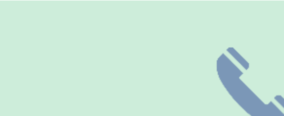
(لكل مستقيمين متوازيين يوجد مستوٍ وحيد يحتويهما)

لكن $\overline{AB}//(X)$	(معطى)
$(Y)\cap(X)=\overline{A'B'}$	(يتقاطع المستويان بخط مستقيم)
$\Leftarrow \overline{AB}//\overline{A'B'}$	(اذا وازى مستقيم مستوياً معلوماً فانه يوازي جميع المستقيمات الناتجة من تقاطع هذا المستوي والمستويات التي تحوي المستقيم)
كذلك $\overline{BB'}\perp\overline{A'B'}$	(المستقيم العمودي على مستوي يكون عمودياً على جميع المستقيمات المرسومة من أثره ضمن ذلك المستوي)
$\overline{AB}\perp\overline{BB'}$	(في المستوي الواحد : المستقيم العمودي على احد مستقيمين متوازيين يكون عمودياً على الآخر)
لكن $\overline{AB}\perp\overline{BC}$	(لان $\measuredangle ABC=90°$ معطى M)
$\overline{AB}\perp(Z)$	(المستقيم العمودي على مستقيمن متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عمودياً على مستويهما)
$\Leftarrow \overline{A'B'}\perp(Z)$	(المستوي العمودي على احد مستقيمين متوازيين يكون عمودياً على الآخر)
$\therefore \overline{A'B'}\perp\overline{B'C'}$	(المستقيم العمودي على مستوي يكون عمودياً على جميع المستقيمات المرسومة من أثره ضمن ذلك المستوي)

و.هـ.م

الاستاذ:-حمزه حازم الكربلائي





07828808092

الاستاذ:-حمزه حازم الكربلائي

مثال – 5-



ABC مثلث ، $\overline{BC} \subset (X)$
والزاوية الزوجية بين مستوي المثلث
ABC والمستوي (X)
قياسها $60°$ فاذا كان
$AB = AC = 13cm, BC = 10cm$
جد مسقط المثلث (ABC) على (X)
ثم جد مساحة مسقط $\triangle ABC$ على (X)

المعطيات :

$\triangle ABC, \overline{BC} \subset (X)$

قياس $(ABC) - \overline{BC} - (X) = 60°$

$AB = AC = 13, BC = 10$

المطلوب اثباته:

ايجاد مسقط $\triangle ABC$ على (X) وايجاد مساحة مسقط $\triangle ABC$ على (X)

البرهان :

نرسم $\overline{AD} \perp (X)$ في D (يمكن رسم عمود على مستوي من نقطة معلومة)

$\therefore$ $\overline{CD}$ مسقط $\overline{AC}$
$\overline{BD}$ مسقط $\overline{AB}$
$\overline{BC}$ مسقط نفسه على (X)

(مسقط قطعة مستقيم على مستو معلوم هو القطعة المحددة بأثري العمودين المرسومين على المستوي من طرفي القطعة المستقيمة)

$\therefore$ $\triangle BCD$ مسقط $\triangle ABC$ على (X)

في (ABC) نرسم $\overline{AE} \perp \overline{BC}$ في E (في المستوي الواحد يمكن رسم مستقيم عمود على آخر من نقطة معلومة)

وبما أن $AC = AB$ (معطى)

$\therefore EC = BE = 5cm$ (العمود النازل من راس مثلث متساوي الساقين على القاعدة ينصفها)



07828808092

$\therefore \overline{ED} \perp \overline{BC}$ (نتيجة مبرهنة الاعمدة الثلاثة)

$\therefore$ $\sphericalangle DEA$ عائدة للزوجية $\overline{BC}$ (تعريف الزاوية العائدة)

لكن قياس الزاوية الزوجية $\overline{BC} = 60°$ (معطى)

في $\triangle AEB$ القائم في E :

$$AE = \sqrt{169-25} = \sqrt{144} = 12cm$$

في $\triangle AED$ القائم في D

$$\cos 60° = \frac{ED}{AE} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{ED}{12} \Rightarrow ED = 6cm$$

$$BCD \text{ مساحة المثلث } = \frac{1}{2} \times 10 \times 6 = 30cm^2$$

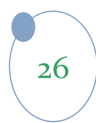
و.هـ.م

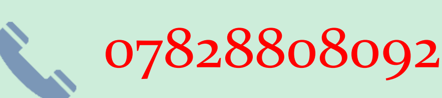


بطلت بعد ماقره شلون امثلة......لاصديقي كمل مبقالك شي يله بطل



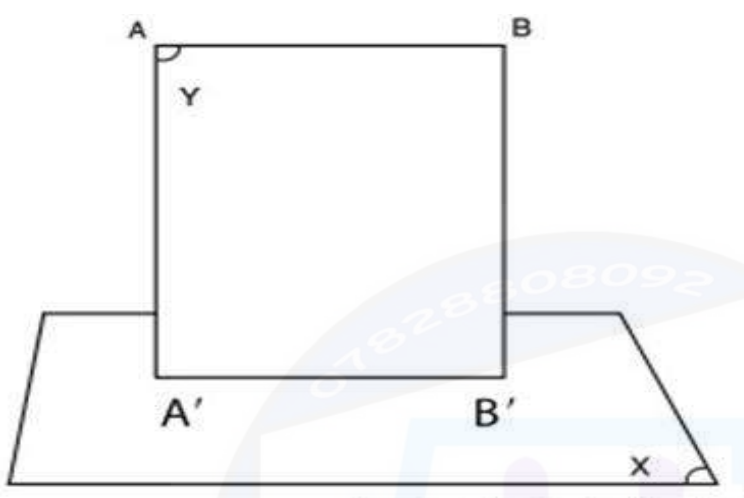
الاستاذ:-حمزه حازم الكربلائي




07828808092

تمارين (2-6)

Q1\ برهن ان طول القطعه المستقيم الموازي لمستوى معلوم يساوي طول مسقطة على تلمستوى المعلوم ويوازية





جماعة الاحيائي على عناد التطبيقي بس ذني التمارين بقالكم

المعطيات : $\overline{A'B'}$ هو مسقط $\overline{AB}$ على (X), $\overline{AB}//(X)$

المطلوب : $AB = A'B'$, $\overline{AB}//\overline{A'B'}$

البرهان : $\because$ $\overline{AA'}, \overline{BB'}$ عمودان على (X) (تعريف المسقط)

$\therefore \overline{AA'}//\overline{BB'}$ (المستقيمان العموديان على مستوٍ واحد متوازيان)

نعين المستوي (Y) بالمستقيمين المتوازيين $\overline{AA'}$ ، $\overline{BB'}$ $\therefore$

(لكل مستقيمين متوازيين يوجد مستوٍ وحيد يحويهما)

$\because \overline{AB}//(X)$ (معطى)

$\overline{AB}//\overline{A'B'}$

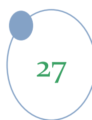
(اذا وازى مستقيم مستوياً فانه يوازي جميع المستقيمات الناتجة من تقاطع هذا المستوي مع المستويات التي تحوي هذا المستقيم)

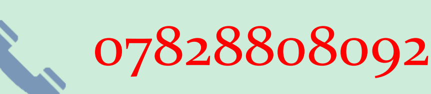
$\therefore ABB'A'$ متوازي اضلاع (لتوازي كل ضلعين متقابلين فيه)

(يتساوى طولا الضلعين المتقابلين في متوازي الاضلاع) $\therefore AB = A'B'$

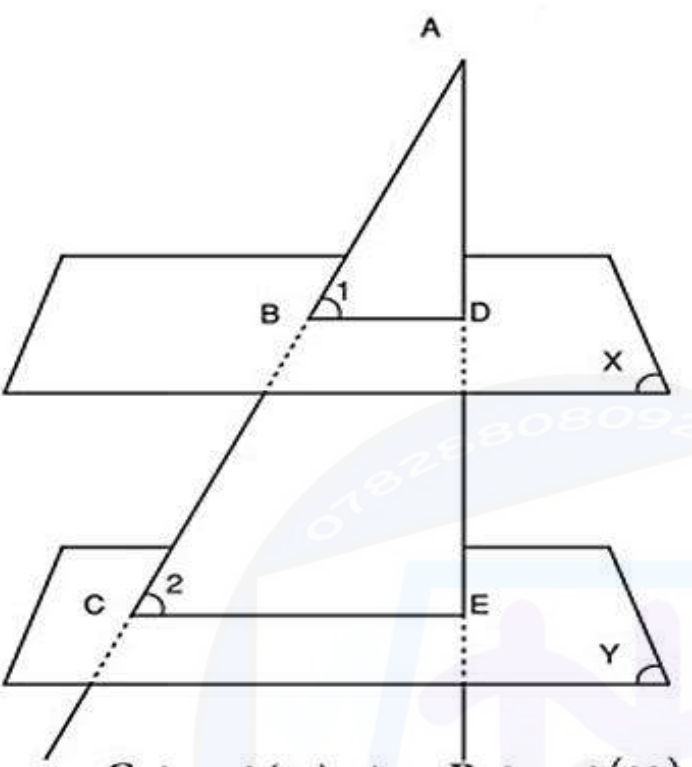
(و.هـ.م.)

الاستاذ: حمزه حازم الكربلائي





Q2\برهن انه اذا قطع مستويان متوازيان بمستقيم فان ميلة على احدهما يساوي ميلة على الاخر



الاستاذ حمـــزه الكربلائي

المعطيات : $(Y)//(X), \overleftrightarrow{AC}$ يقطع (X) في نقطة B ويقطع (Y) في نقطة C

المطلوب : ميل $\overleftrightarrow{AC}$ على (X) = ميل $\overleftrightarrow{AC}$ على (Y)

البرهان : نرسم $\overleftrightarrow{AD} \perp (X)$ (يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستوي من نقطة معلومة) اذن $\overleftrightarrow{AD} \perp (Y)$ في E

(المستقيم العمودي على احد مستويين متوازيين يكون عمودياً على الاخر)

$\therefore \overline{DB}$ هو مسقط $\overline{AB}$ على (X)

$\overline{EC}$ هو مسقط $\overline{AC}$ على (Y) (تعريف مسقط قطعة مستقيم)

$\measuredangle 1$ هي زاوية ميل $\overleftrightarrow{AB}$ على (X) (زاوية الميل : هي الزاوية المحددة بالمائل ومسقطه على المستوي)

$\measuredangle 2$ هي زاوية ميل $\overleftrightarrow{AC}$ على (Y)

$m\measuredangle 1 = m\measuredangle 2$ (متناظرة)

$\therefore$ ميل $\overleftrightarrow{AC}$ على (X) = ميل $\overleftrightarrow{AC}$ على (Y) (و.هـ.م.)

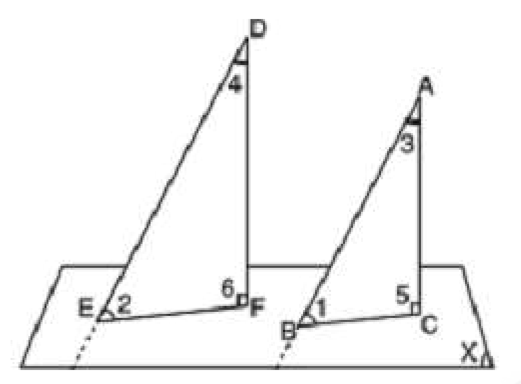
الاستاذ:-حمزه حازم الكربلائي



07828808092

Q3\برهن على ان للمستقيمات المتوازية المائلة على مستو الميل نفسة

المعطيات :-



$\overleftrightarrow{AB} \;//\; \overleftrightarrow{CD}$ وكل منهما مائل على X

المطلوب اثباتة :

ميل $\overleftrightarrow{AB}$ على X = ميل $\overleftrightarrow{CD}$ على X

البرهان

ليكن $(X) \perp \overleftrightarrow{AE}$ في نقطة E (يمكن رسم مستقيم عمودي على مستو من نقطة)

$(X) \perp \overleftrightarrow{CF}$

∴ $\overleftrightarrow{BE}$ هو مسقط AB على (X) (تعريف مسقط قطعة مستقيم)

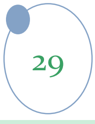
$\overleftrightarrow{DF}$ هو مسقط $\overleftrightarrow{CD}$ على X

$\measuredangle 1$ هي زاوية ميل $\overleftrightarrow{AB}$ على (X) (زاوية ميل مستقيم مائل على مستوى هي

$\measuredangle 2$ هي زاوية ميل $\overleftrightarrow{CD}$ على (X) (الزاوية المحددة بالمائل ومسقطة على المستوى)

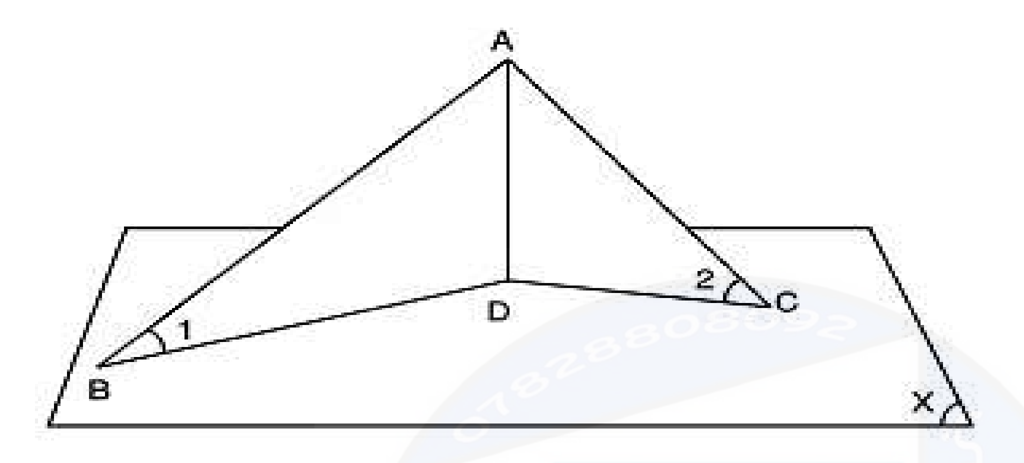


الاستاذ:-حمزه حازم الكربلائي



07828808092

س4 :برهن على أنه إذا رسم مائلان مختلفان في الطول من نقطة لا تنتمي الى مستوٍ معلوم فان أطولهما تكون زاوية ميله على المستوي أصغر من زاوية ميل الآخر عليه .



المعطيات : $\overline{AC}, \overline{AB}$ مائلان على (X) ، $AB > AC$

المطلوب : زاوية ميل $\overline{AB}$ على (X) أصغر من زاوية ميل $\overline{AC}$ على (X)

البرهان : نرسم $\overline{AD} \perp (X)$

(يمكن رسم عمود واحد فقط على مستوٍ من نقطة معلومة)

فيكون $\overline{BD}$ هو مسقط $\overline{AB}$ على (X)

$\overline{CD}$ هو مسقط $\overline{AC}$ على (X)

(مسقط قطعة مستقيم غير عمودي على مستوي هو قطعة المستقيم الواصلة بين أثري العمودين المرسومين من طرفي القطعة على المستوي)

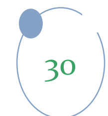
$\measuredangle 1$ هي زاوية ميل $\overline{AB}$ على (X)

$\measuredangle 2$ هي زاوية ميل $\overline{AC}$ على (X)

(زاوية الميل : هي الزاوية المحدده بالمائل ومسقطه على المستوي)

$\because AB > AC$ (معطى)

الاستاذ:-حمزه حازم الكربلائي





07828808092

الاستاذ حمــزه الكربلائي

$\frac{1}{AB} < \frac{1}{AC}$ (خواص التباين)

$\frac{AD}{AB} < \frac{AD}{AC}$

$\sin \measuredangle 1 < \sin \measuredangle 2$ زوايا حادة $\measuredangle 1 , \measuredangle 2$

$\therefore m\measuredangle 1 < m\measuredangle 2$ (و.هـ.م.)

Q5 \ابرهن على انه اذا رسم مائلان من نقطة ماعلى مستو فاصغرهما ميلا هو الاطول

المعطيات : $A \notin (X)$

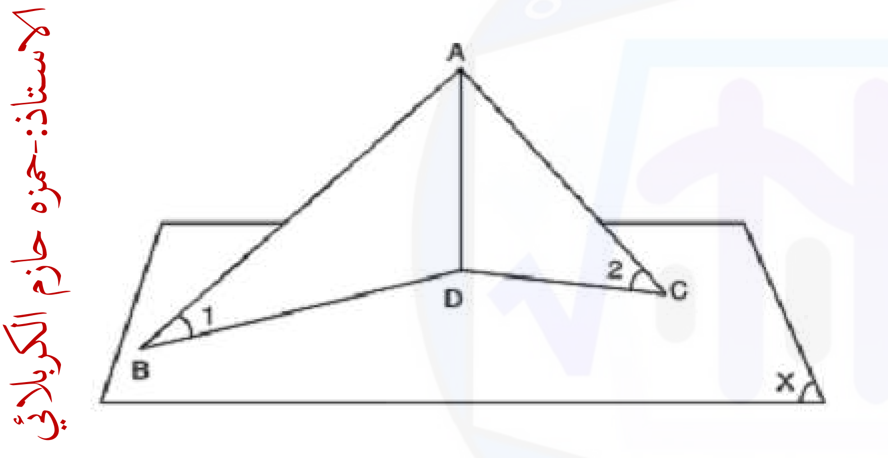
كل من AB AC مائلان على X

بحيث زتوية ميل AB على X

اصغر من زاوية ميل AC على X

المطلوب اثباتة AC<AB

البرهان



ليكن $\overleftrightarrow{AD} \perp (X)$ في D يوجد مستقيم وحيد عمودي على مستوى معلوم من نقطة معلومه)

.: BD مسقط AB على المستوى X (تعريف قطعة مستقيم)

.:DC مسقط AC على المستوى X

$\measuredangle 1$ هي زاوية ميل $\overleftrightarrow{AB}$ على (X) (زاوية ميل مستقيم مائل على مستوى هي

$\measuredangle 2$ هي زاوية ميل $\overleftrightarrow{AC}$ على (X) الزاوية المحددة بالمائل ومسقطة على المستوى)

في المثلثين ADB , ADC القائمين في D

بما ان $m\measuredangle 1 < m\measuredangle 2$ (معطى) $\sin \measuredangle 1 < \sin \measuredangle 2$

الاستاذ:-حمزه حازم الكربلائي

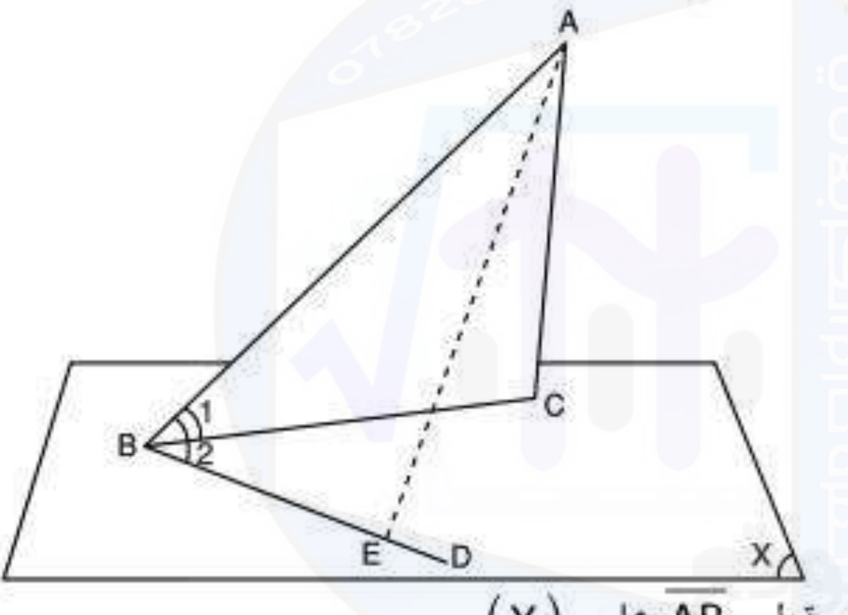
07828808092

ولكن $sin = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ $\quad sin\measuredangle 2 = \frac{AD}{AC}$, $sin\measuredangle 1 = \frac{AD}{AB}$

$\therefore \frac{AD}{AC} < \frac{AD}{AB}$ وبقلب النسب $\frac{AC}{AD} > \frac{AB}{AD}$ (من خواص المتراجحات)

AB>AC (بالضرب في AD) و.هـــ.م

س6: برهن على أن الميل بين المستقيم ومسقطه على مستوٍ اصغر من الزاويه المحصورة بين المستقيم نفسه واي مستقيم أخر مرسوم من موقعه ضمن ذلك المستوي .



المعطيات : ليكن $\overline{BC}$ مسقط $\overline{AB}$ على (X)

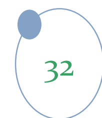
$\measuredangle ABC$ زاوية الميل ، $\overline{BD} \subset (X)$

المطلوب : $m\measuredangle ABC < m\measuredangle ABD$

البرهان : لتكن $E \in \overline{BD}$ بحيث $BC = BE$

نصل $\overline{AE}$

الاستاذ:-حمزه حازم الكربلائي





07828808092

$\because \overleftrightarrow{AC} \perp (X)$ (تعريف المسقط)

$AC < AE$

(العمود : هو أقصر مسافة بين نقطه ومستوي)

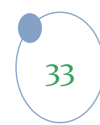
$BC = BE$ (بالعمل) ، $AB = AB$ (مشترك)

$\therefore m\measuredangle 1 < m\measuredangle 2$

(اذا ساوى ضلعا مثلث ضلعي مثلث آخر وأختلف الضلعان الآخران فاصغرهما يقابل أصغر الزاويتين)

(و.هـ.م .)

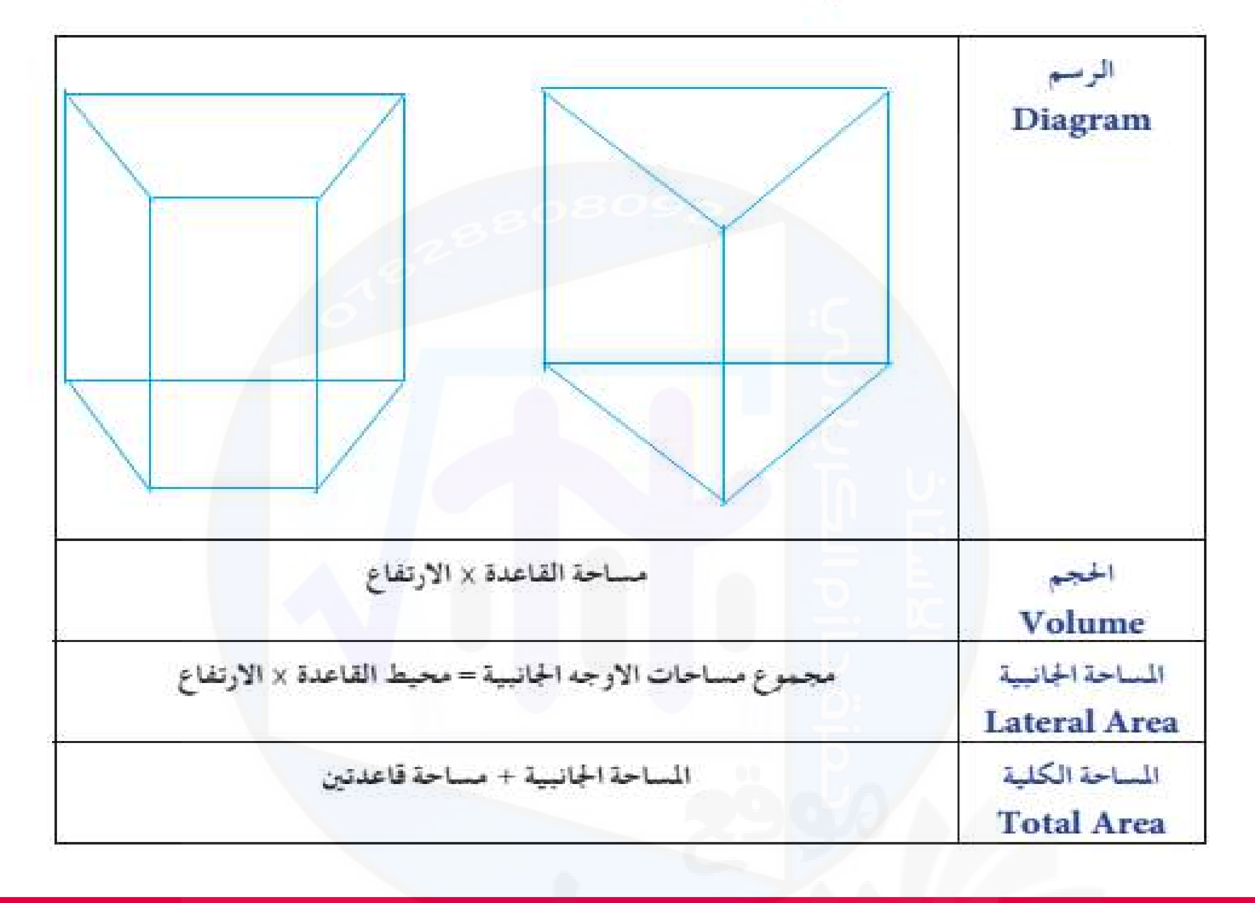
الاستاذ حمـــزه الكربلائي



07828808092

تطبيقي فقط

[6-4] المجسمات (Solid)



سبق للطالب دراسة المجسمات في المرحلة المتوسطة ونلخص فيما يلي قوانين الحجوم والمساحات الجانبية والكلية لبعض المجسمات علماً ان الحديث عن حجم مجسم نقصد به حجم المنطقة في الفراغ (الفضاء) الواقعة داخل المجسم.

1) الموشور (المنشور) القائم (Right Prism)

الرسم Diagram	
الحجم Volume	مساحة القاعدة × الارتفاع
المساحة الجانبية Lateral Area	مجموع مساحات الاوجه الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع
المساحة الكلية Total Area	المساحة الجانبية + مساحة قاعدتين



جماعة التطبيقي لاتشوفون مادتكم
للاحيائي لايحسدوكم لان انتم
المهندسين

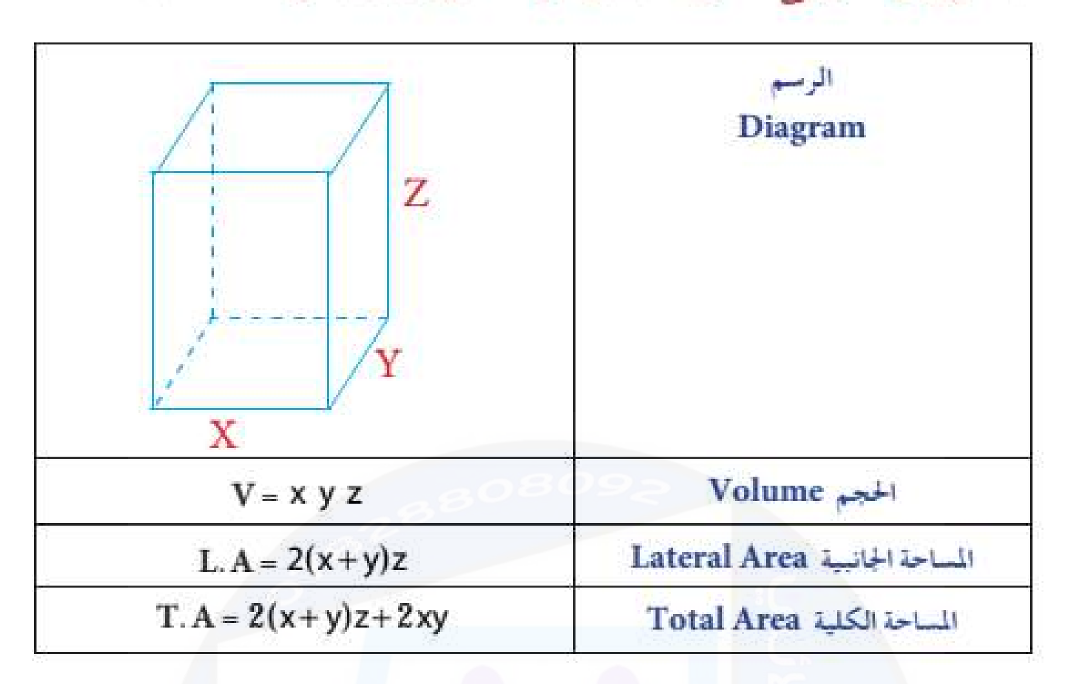
الاستاذ:-حمزه حازم الكربلائي





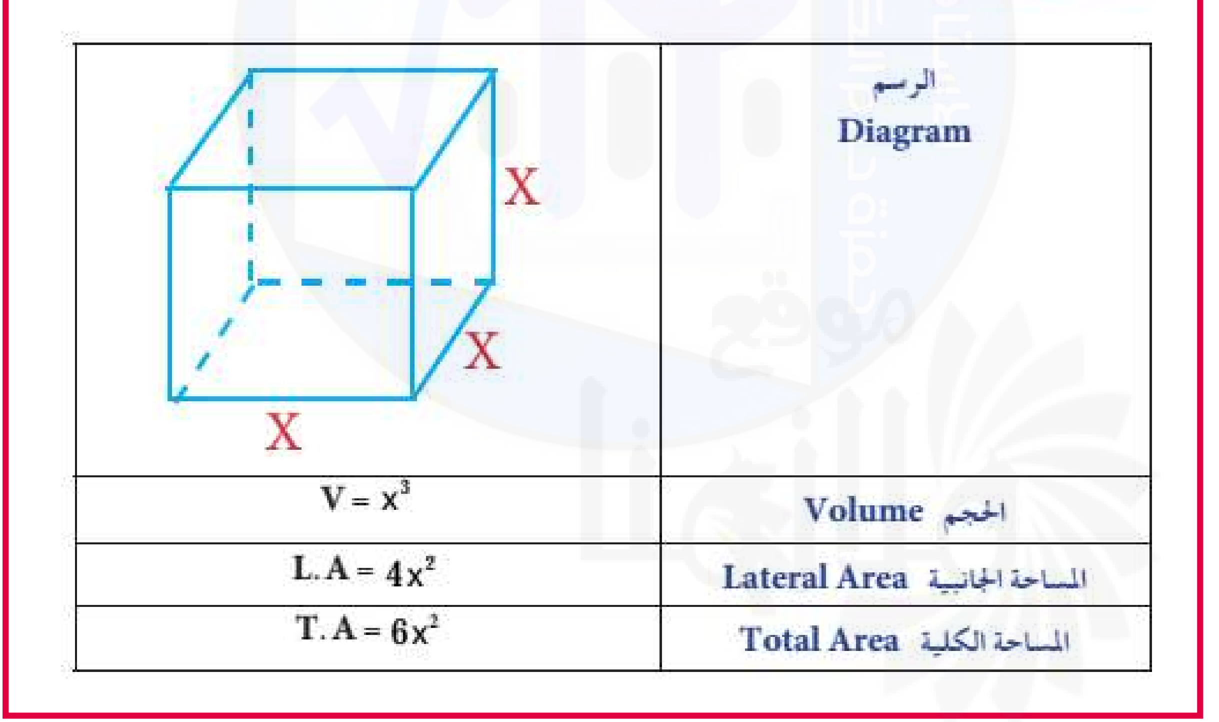
07828808092

2) متوازي السطوح المستطيلة (متوازي المستطيلات) (ParallelPiped)



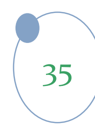
	الرسم Diagram
$V = x\,y\,z$	Volume الحجم
$L.A = 2(x+y)z$	Lateral Area المساحة الجانبية
$T.A = 2(x+y)z+2xy$	Total Area المساحة الكلية

3) المكعب (Cube)



	الرسم Diagram
$V = x^3$	Volume الحجم
$L.A = 4x^2$	Lateral Area المساحة الجانبية
$T.A = 6x^2$	Total Area المساحة الكلية

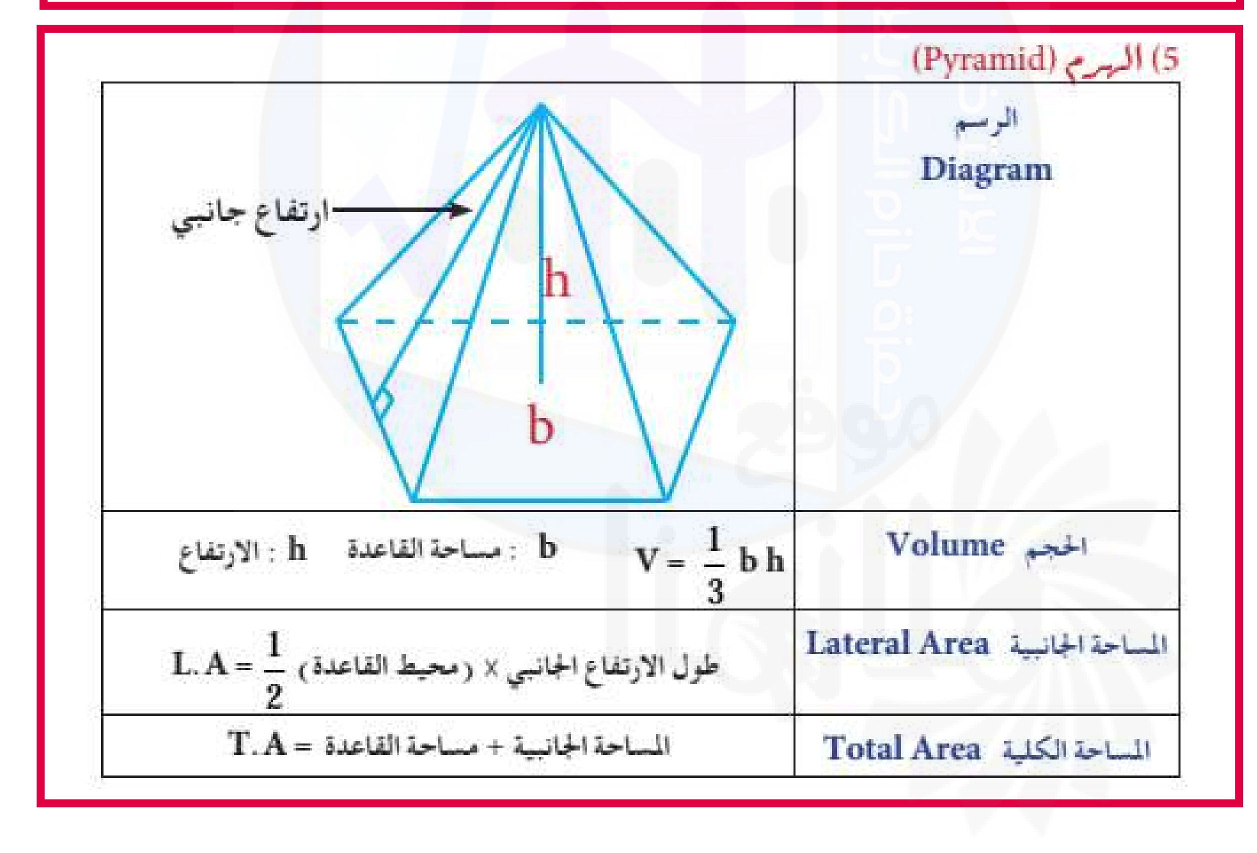
الاستاذ:-حمزه حازم الكربلائي




07828808092

4) الاسطوانة الدائرية القائمة (Right Circular Cylinder)

	الرسم Diagram
$V = \pi r^2 h$	الحجم Volume
$L.A = 2\pi rh$	المساحة الجانبية Lateral Area
$T.A = 2\pi rh + 2\pi r^2$	المساحة الكلية Total Area

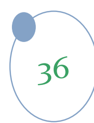


5) الهرم (Pyramid)

	الرسم Diagram
ارتفاع جانبي، h، b	
$V = \frac{1}{3} b h$ b : مساحة القاعدة h : الارتفاع	الحجم Volume
$L.A = \frac{1}{2}$ (محيط القاعدة) × طول الارتفاع الجانبي	المساحة الجانبية Lateral Area
T.A = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة	المساحة الكلية Total Area

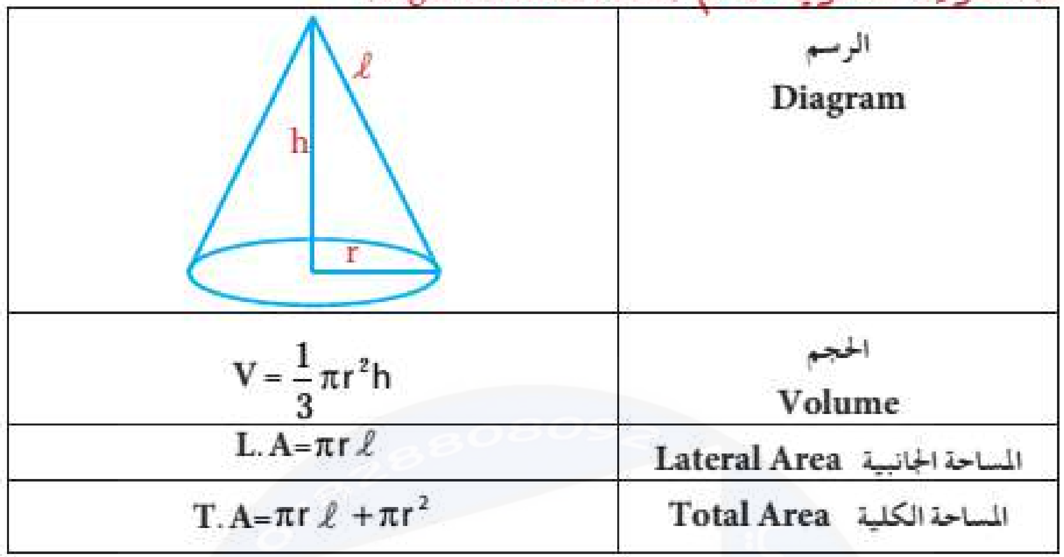
الاستاذ:-حمزه حازم الكربلائي





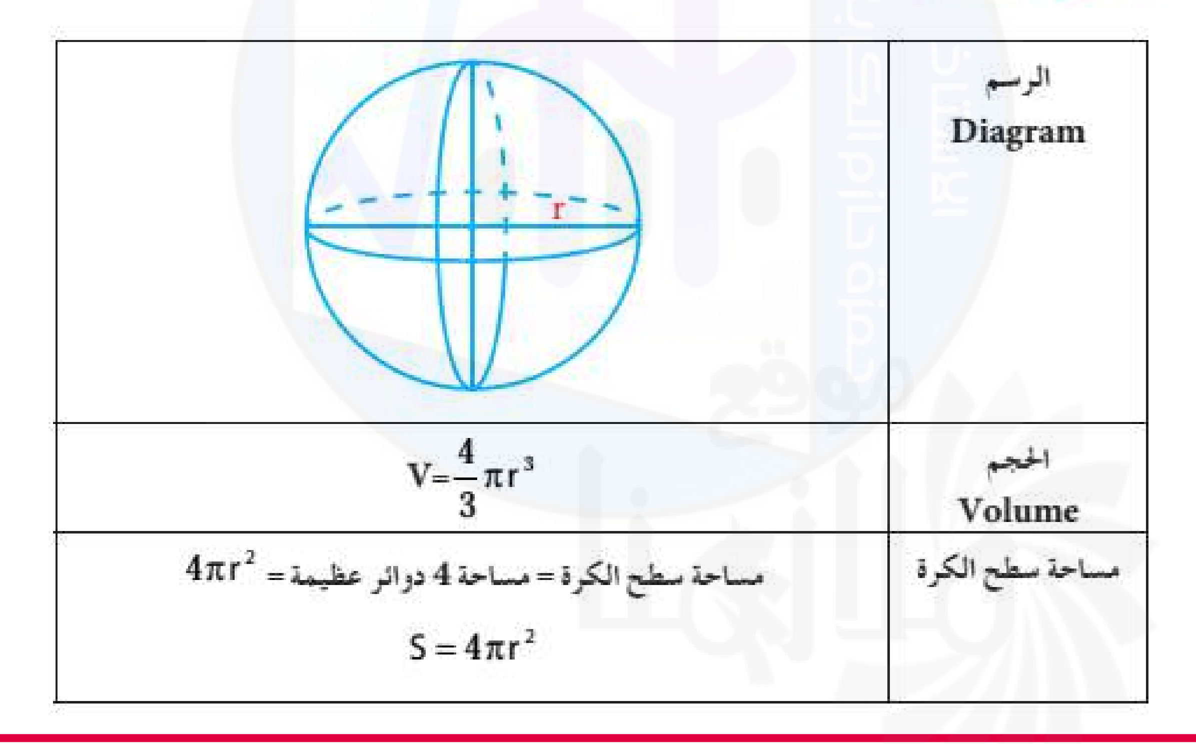
07828808092

6) المخروط الدائري القائم (Right Circular Cone)



الرسم Diagram	
الحجم Volume	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$
Lateral Area المساحة الجانبية	$L.A = \pi r \ell$
Total Area المساحة الكلية	$T.A = \pi r \ell + \pi r^2$

7) الكرة (Sphere)



الرسم Diagram	
الحجم Volume	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$
مساحة سطح الكرة	مساحة سطح الكرة = مساحة 4 دوائر عظيمة = $4\pi r^2$ $S = 4\pi r^2$

الاستاذ:-حمزه حازم الكربلائي



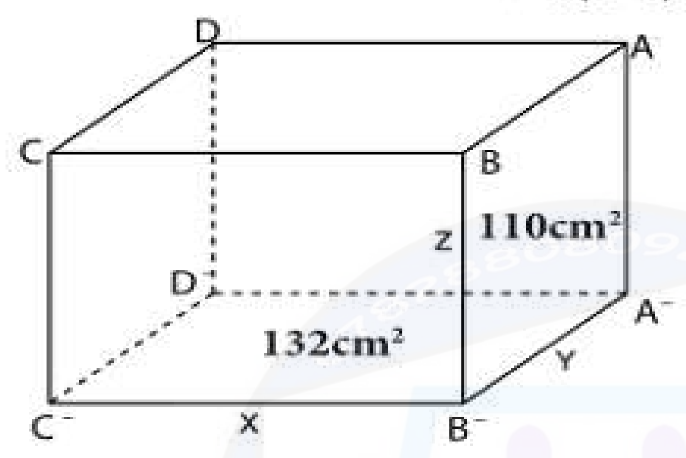




07828808092

تمارين (6_3) تطبيقي

س1 :اذا كانت المساحة الكلية لمتوازي المستطيلات $=724cm^2$ ومساحة قاعدته $=132cm^2$ ومساحة احد اوجهه الجانبية $=110cm^2$ جد حجمه .



المعطيات :متوازي المستطيلات

مساحته الكلية $=724cm^2$ ومساحة قاعدته $=132cm^2$

ومساحة احد اوجهه الجانبية $=110cm^2$

المطلوب : ايجاد حجمه

البرهان : نفرض أبعاده x,y,z

مساحة الوجهين المتقابلين $(BC'),(AD') = 724-(2\times 132+2\times 110)$

$724-(264+220) = 724-484 = 240cm^2$

∴ مساحة الوجه (BC') هي $\frac{240}{2} = 120cm^2$

$\therefore x.y = 132......(1)$

$y.z = 110.......(2)$

$x.z = 120.......(3)$

وبضرب المعادلات الثلاثة

$\Rightarrow x^2y^2z^2 = 132\times 110\times 120$

$(xyz)^2 = 12\times 11\times 10\times 11\times 10\times 12$

الاستاذ:-حمزه حازم الكربلائي

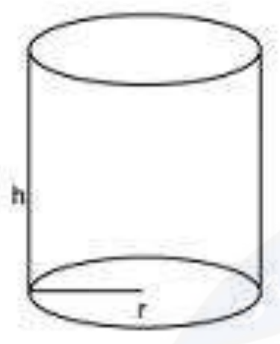


$xyz = 12 \times 11 \times 10$

وبجذر الطرفين

$\therefore v = 1320 cm^3$

س2 : اسطوانة دائرية قائمة مساحتها الجانبية $400\pi cm^2$ وحجمها $2000\pi cm^3$ اوجد ارتفاعها ونصف قطر قاعدتها .



المعطيات :

اسطوانه دائريه قائمة مساحتها الجانبية = $400\pi cm^2$

وحجمها = $2000\pi cm^3$

المطلوب :ايجاد ارتفاعها ونصف قطر قاعدتها

البرهان :

حجم الاسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع $v = \pi r^2 h$

$\therefore 2000\pi = \pi r^2 h \Rightarrow 2000 = r^2 h........(1)$

المساحة الجانبية للاسطوانة = محيط القاعدة × الارتفاع $L.A = 2\pi rh$

$400\pi = 2\pi rh \xrightarrow{\div 2} 200 = rh......(2)$

بقسمة (1) على (2)

$$\frac{2000}{200} = \frac{r^2 h}{rh}$$

$r = 10cm$ نصف القطر

نعوض في (2)

$200 = 10h$

$h = 20cm$ الارتفاع

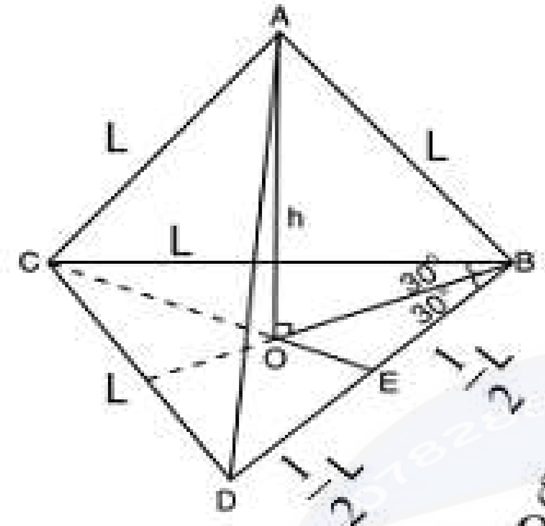
(و.هـ.م.)

الاستاذ:-حمزه حازم الكربلائي



07828808092

س3 : برهن على ان حجم ذي الوجوه الاربعة المنتظم والذي طول حرفه L= وحدة هو $V=\frac{\sqrt{2}L^3}{12}$ وحدة مكعبة .



المعطيات :
A–BCD ذو الوجوه الاربعة المنتظم
وطول حرفه L

المطلوب : $V=\frac{\sqrt{2}L^3}{12}$

البرهان : القاعدة BCD مثلث متساوي الاضلاع
نرسم الاعمدة المنصفة للاضلاع فتلتقي في نقطة O

في مثلث BOE القائم في E

$$\cos 30° = \frac{BE}{BO} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\frac{1}{2}L}{BO}$$

$$\sqrt{3}BO = L \Rightarrow BO = \frac{L}{\sqrt{3}}$$

$$(AB)^2 = (AO)^2 + (OB)^2 \quad \text{(فيثاغورس)}$$

$$L^2 = h^2 + \left(\frac{L}{\sqrt{3}}\right)^2 \Rightarrow h^2 = L^2 - \frac{L^2}{3} = \frac{2L^2}{3} \Rightarrow \therefore h = \frac{\sqrt{2}L}{\sqrt{3}}$$ وحدة

حجم الهرم = $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

مساحة المثلث BCD تساوي $\frac{\sqrt{3}}{4}L^2$

(b: مساحة القاعدة)

الاستاذ: حمزه حازم الكربلائي
07828808092

(b: مساحة القاعدة)

$$v = \frac{1}{3} bh$$

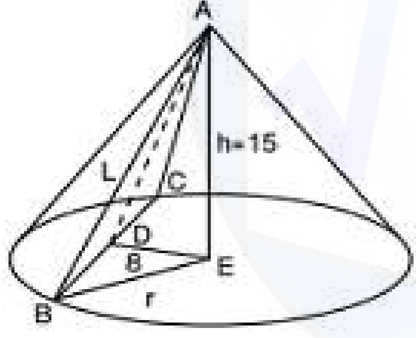
$$\therefore v = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} L^2 \times \frac{\sqrt{2}L}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}L^3}{12}$$ وحدة مكعبة

(و.هـ.م.)

ملاحظة مساحة مثلث متساوي الاضلاع = $\frac{\sqrt{3}}{4}$ مربع الضلع

س4 :مخروط دائري قائم مر برأسه مستوٍ فقطع قاعدته بقطعة مستقيم تبعد عن مركز القاعدة بمقدار 8cm فاذا كانت المقطع = $102cm^2$ وارتفاع المخروط=15cm احسب :

1) حجمه 2) مساحته الجانبية 3) مساحته الكلية



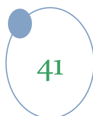
المعطيات : مخروط دائري مر مستوي برأسه A فقطع قاعدته في $\overline{BC}$ والتي تبعد عن المركز 8cm ، مساحة المقطع $h = 15cm, ABC = 102cm^2$

المطلوب :1 – الحجم 2 – المساحة الجانبية 3 – المساحة الكلية

البرهان : في مثلث AED القائم في E

(المستقيم العمودي على مستوي يكون عمودياً على جميع المستقيمات المرسومة من أثره ضمن ذلك المستوي)

الاستاذ:-حمزه حازم الكربلائي


07828808092

$(AD)^2 = 15^2 + 8^2 = 225 + 64 = 289$ (فيثاغورس)

$\therefore AD = \sqrt{289} = 17cm$

$\overline{AE} \perp$ مستوي القاعدة

$\overline{ED} \perp \overline{BC}$

$\Rightarrow \overline{AD} \perp \overline{BC}$ (مبرهنة الاعمدة الثلاثة)

$\frac{1}{2} BC \times AD$ مساحة المثلث ABC تساوي

$102 = \frac{1}{2} BC \times 17 \Rightarrow BC = \frac{(102)(2)}{17} = 12cm$

$\therefore BD = CD = 6cm$ (العمود النازل من مركز دائرة على وتر فيها ينصفه)

في مثلث EDB القائم في D

$r^2 = 8^2 + 6^2 = 100$ (فيثاغورس)

$\therefore r = 10cm$

في مثلث AEB القائم في E (فيثاغورس)

$L^2 = 15^2 + 10^2 = 325$

$\therefore L = \sqrt{325} = 5\sqrt{13}\ cm$

1) $V = \frac{1}{3}\pi \times 100 \times 15 = 500\pi\ cm^3$ الحجم

المساحة الجانبية

2) $L.A = \pi r L = \pi \times 10 \times 5\sqrt{13} = 50\sqrt{13}\pi\ cm^2$

3) $T.A = \pi r L + \pi r^2 = 50\sqrt{13}\pi + 100\pi = 50\pi\left(\sqrt{13} + 2\right)\ cm^2$

المساحة الكلية

(و.هـ.م.)

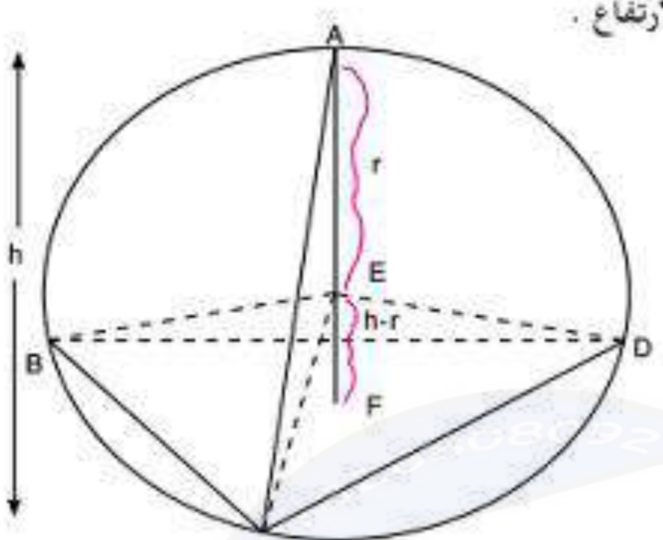
الاستاذ:-حمزه حازم الكربلائي



07828808092

س5 : اذا علمت انه يمكن رسم كرة خارج ذي الوجوه الاربعة المنتظم

برهن ان نصف قطر الكرة $= \frac{3}{4}$ الارتفاع .



المعطيات : $A - BCD$ شكل ذي اربع وجوه منتظم مرسوم داخل كره نصف قطرها =r

المطلوب : $r = \frac{3}{4}h$ (حيث h ارتفاع المخروط)

البرهان :

$$AF = h, AE = r \Rightarrow EF = h - r$$

نصل مركز الكرة E برؤوس الهرم

∴ ينقسم الهرم $A - BCD$ الى أربعة اهرامات متساوية بالحجم (لتساوي القاعدة والارتفاع) وهي

$$E - DCB, E - ABC, E - ACD, E - ABD$$

∴ حجم ذو الوجوه الاربعه = 4 × حجم الهرم $E - DCB$

لتكن مساحة القاعدة= b

$$\therefore \frac{1}{3}\cancel{b}.h = 4 \times \frac{1}{3}\cancel{b}(h - r)$$

$$h = 4h - 4r$$

$$4r = 3h$$

$$r = \frac{3}{4}h$$

(و. هـ. م)

الاستاذ:-حمزه حازم الكربلائي



07828808092

تمـــارين عــامة

س1 :

$$\frac{y}{1+i}=\frac{x^2+4}{x+2i}$$

الحل

$$\frac{y}{1+i}=\frac{x^2-4i^2}{x+2i}$$

$$\frac{y}{1+i}=\frac{(x+2i)(x-2i)}{x+2i}$$

$$y=(x-2i)(1+i)$$

$$y+0i=(x+2)+(x-2)i$$

$$\therefore y=x+2...(1)$$

$$x-2=0\rightarrow x=2......(2)$$

نعوض في (1)

$$y=2+2\rightarrow y=4$$

تطبيقي فقط

س2 :

$$\left(3\omega^{9n}+\frac{5}{\omega^5}+\frac{4}{\omega^4}\right)^6=\left[\left(3\left(\omega^3\right)^{3n}+\frac{5}{\omega^3\,\omega^2}+\frac{4}{\omega^3\,\omega}\right)^2\right]^3$$

الحل

$$\left[\left(3+\frac{5\omega^3}{\omega^2}+\frac{4\omega^3}{\omega}\right)^2\right]^3=\left[\left(3+5\omega+4(-1-\omega)\right)^2\right]^3$$

$$\left[(3+5\omega-4-4\omega)^2\right]^3=\left[(-1+\omega)^2\right]^3=\left[1-2\omega+\omega^2\right]^3$$

$$[-\omega-2\omega]^3=[-3\omega]^3=-27$$

الاستاذ:-حمزه حازم الكربلائي



07828808092

س3 :

$$z=\frac{1-\sqrt{3}i}{1+\sqrt{-3}}=\frac{1-\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i}\times\frac{1-\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}$$

الحل

$$=\frac{(1-3)+\left(-\sqrt{3}-\sqrt{3}\right)i}{1+3}=\frac{-2-2\sqrt{3}i}{4}=\frac{2}{4}=\frac{2\sqrt{3}i}{4}$$

$$\therefore z=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\text{mod } z=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=\sqrt{1}=1$$

$$\cos\theta=-\frac{1}{2}\ ,\ \sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}\ \underset{\text{الثالث}}{\overset{\text{في الربع}}{\Longrightarrow}}\ \theta=\pi+\frac{\pi}{3}=\frac{4\pi}{\pi}$$

$$\therefore z=1\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}$$

$$z^{\frac{1}{2}}=\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)^{\frac{1}{2}}=\cos\frac{\frac{4\pi}{3}+2\pi k}{2}+i\sin\frac{\frac{4\pi}{3}+2\pi k}{2}$$

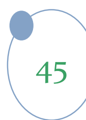
حيث $k=0,1$

$$k=0\rightarrow z^{\frac{1}{2}}=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$k=1\rightarrow z^{\frac{1}{2}}=\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

ملاحظة $\frac{5\pi}{3}=300^\circ$

الاستاذ:-حمزه حازم الكربلائي



07828808092

س4 : القطع الناقص

الحل

$$9x^2 + 25y^2 = 225 \qquad \div 255$$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$$a^2 = 25 \Rightarrow a = 5 \overset{\text{الرأسين}}{\Rightarrow} (5,0),(-5,0)$$

$$b^2 = 9$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4 \overset{\text{البؤرتين}}{\Rightarrow} (4,0),(-4,0)$$

أ) المساحة

$$A = a.b\pi = 5 \times 3\pi = 15\pi \quad unit^2$$

ب) المحيط

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} = 2\pi\sqrt{\frac{25 + 9}{2}} = 2\pi\sqrt{17} \quad unit$$

جـ) الزائد

$a = 4 \Leftarrow (4,0),(-4,0)$ رأساه

$c = 5 \Leftarrow (5,0),(-5,0)$ بؤرتاه

$$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow 25 = 16 + b^2 \Rightarrow 9 = b^2$$

المعادلة

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

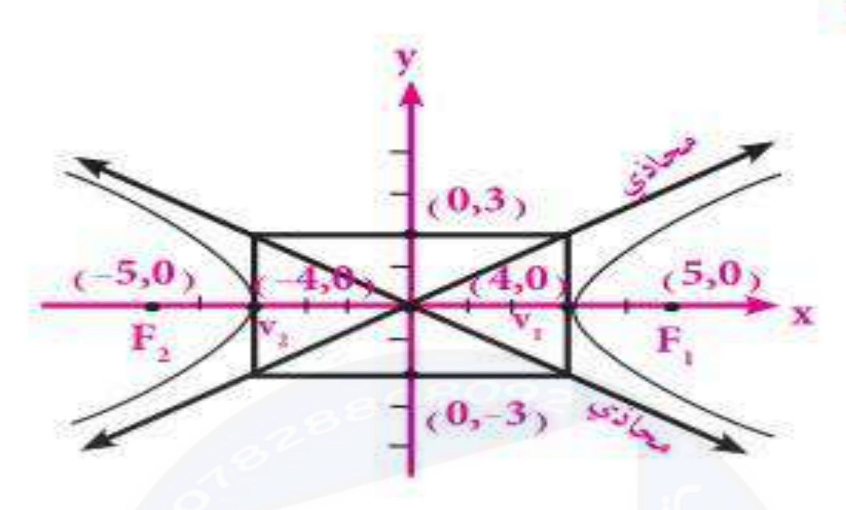
ء) الاختلاف المركزي

$$e = \frac{c}{a}$$

$$e = \frac{4}{5}$$

الاستاذ:-حمزه حازم الكربلائي

رسم القطع الزائد



س5 :

$$A = ab\pi \Rightarrow 7\pi = ab\pi \Rightarrow b = \frac{7}{a} \ldots\ldots \boxed{1}$$

$$p = 2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \Rightarrow 10\pi = 2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

بالتربيع

$$25 = \frac{a^2+b^2}{2} \rightarrow a^2+b^2 = 50 \ldots\ldots\ldots \boxed{2}$$

$$\therefore a^2 + \frac{49}{a^2} = 50$$ بالضرب $a^2 \neq 0$

$$a^4 - 50a^2 + 49 = 0$$

$$(a^2-1)(a^2-49) = 0$$

نعوض في (1)

أما $a^2 - 1 = 0 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow b = 7$ (يهمل لان $a<b$)

نعوض في (1)

أو $a^2 - 49 = 0 \Rightarrow a = 7 \Rightarrow b = 1$

المعادلة $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{1} = 1$

الاستاذ:-حمزه حازم الكربلائي



07828808092

س6 :

a) $x^3y^2 - 2y = 5x + 3$

$$x^3.\ 2y\frac{dy}{dx} + y^2.\ 3x^2 - 2\frac{dy}{dx} = 5$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(2x^3y - 2\right) = 5 - 3x^2y^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5 - 3x^2y^2}{2x^3y - 2}$$

b) $y = (\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x$

$$\therefore y = 1 + \sin 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos 2x.\ 2 = 2\cos 2x$$

c) $y = e^{x^2}\ln|2x|$

$$y = e^{x^2}\ln|2x|$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{x^2}.\frac{1}{\not{2}x}.\ \not{2} + \ln|2x|.e^{x^2}.2x$$

$$= \frac{e^{x^2}}{x} + 2xe^{x^2}\ln|2x|$$

d) $y = \tan(\cos x)$

$$\frac{dy}{dx} = \sec^2(\cos x)(-\sin x) = -\sin x.\sec^2(\cos x)$$

الاستاذ:-حمزه حازم الكربلائي



07828808092

e) $y = x^2 \ln|x|$

$$\frac{dy}{dx} = x^2 \cdot \frac{1}{x} + \ln|x| \cdot 2x = x + 2x\ln|x|$$

f) $y = \ln(\tan^2 x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\tan^2 x} \cdot 2(\tan x) \cdot \sec^2 x = \frac{2\sec^2 x}{\tan x}$$

g) $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x}) - (e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x})}{(e^x - e^{-x})^2}$$

$$= \frac{(e^{2x} - 2 + e^{-2x}) - (e^{2x} + 2 + e^{-2x})}{(e^x - e^{-x})^2} = \frac{-4}{(e^x - e^{-x})^2}$$

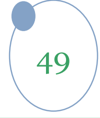
h) $y = \cos(e^{\pi x})$

$$\frac{dy}{dx} = -\sin(e^{\pi x}) \cdot e^{\pi x} \cdot \pi$$

$$= -\pi e^{\pi x} \sin(e^{\pi x})$$



الاستاذ:-حمزه حازم الكربلائي



الاستاذ:-حمزه حازم الكربلائي

س7:

$$f(x) = x^4 - 2x^2 \qquad x \in [-2, 2]$$

$$f(a) = f(-2) = 16 - 8 = 8$$

$$f(b) = f(2) = 16 - 8 = 8$$

$$f'(x) = 4x^3 - 4x$$

$$f'(c) = 4c^3 - 4c$$

1) مبرهنة رول : $f(a)=f(b)$ ، مستمرة ، قابلة للأشتقاق (كثيرة الحدود)

$$\therefore f'(c) = 0 \Rightarrow 4c^3 - 4c = 0 \Rightarrow 4c(c^2 - 1) = 0$$

$$4c(c-1)(c+1) = 0 \Rightarrow c = 0 \in (-2, 2)$$

$$c = 1 \in (-2, 2)$$

$$c = -1 \in (-2, 2)$$

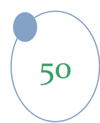
2) مبرهنة القيمة المتوسطة :

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$4c^3 - 4c = \frac{8 - 8}{2 - (-2)} = \frac{0}{4} = 0 \Rightarrow c = 0 \in (-2, 2)$$

$$c = 1 \in (-2, 2)$$

$$c = -1 \in (-2, 2)$$





07828808092

الاستاذ:-حمزه حازم الكربلائي

س8:

$$f(n) = ax^2 - 4x + 5 \qquad [-1, b] \quad c = 2$$

$$f'(x) = 2ax - 4$$

$$f'(c) = 2ac - 4$$

$$\because f'(c) = 0 \Rightarrow 2ac - 4 = 0$$

لكن $c = 2 \Rightarrow 4a - 4 = 0 \Rightarrow a = 1$

$$\therefore f(x) = x^2 - 4x + 5$$

$$f(a) = f(-1) = 1 + 4 + 5 = 10$$

$$f(b) = b^2 - 4b + 5$$

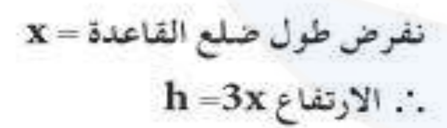
$$f(a) = f(b) \Rightarrow b^2 - 4b + 5 = 10 \Rightarrow b^2 - 4b - 5 = 0$$

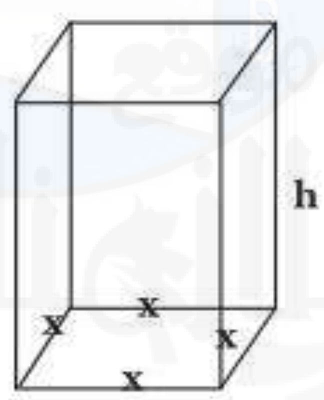
$$(b+1)(b-5) = 0$$

أما $b = -1$ (تهمل $b > a$)

أو $b = 5$

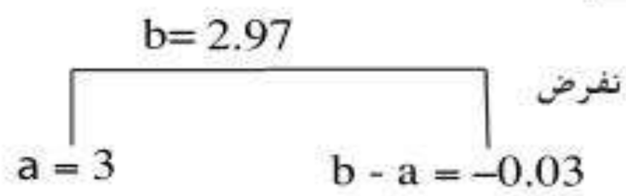
س9:





$$v = x^2h = x^2.3x$$

$$f(x) = v = 3x^3$$



الاستاذ حمـــزه الكربلائي



07828808092

$$f(a) = f(3) = 3(3)^3 = 81$$

$$f'(x) = 9x^2$$

$$f'(3) = f'(a) = 9(3)^3 = 81$$

$$f(a+h) = f(a) + h.f'(a)$$

$$f(2.97) = v = 81 + (-0.03)(81) = 81 - 2.43$$

$$\simeq 78.57 \ \ cm^3$$ الحجم بصورة تقريبية

س10:

$$v = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$210\pi = \frac{1}{3}\pi r^2 x10 \Rightarrow r^2 = 63 \Rightarrow r = \sqrt{63}$$

نفرض

$b = 63$

$a = 64 = 8^2$ $\qquad$ $b - a = -1$

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$f(a) = (8^2)^{\frac{1}{2}} = 8$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'(a) = f'(8) = \frac{1}{2}(8^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x\frac{1}{8} = \frac{1}{16} = 0.0625$$

$$\therefore r = \sqrt{63} \simeq 8 + (-1)x0.0625 = 7.9375cm$$ نصف القطر بصورة تقريبية

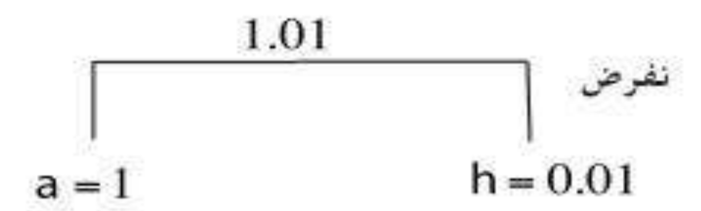
الاستاذ:-حمزه حازم الكربلائي



07828808092


س11:

$$f(x)=\sqrt[5]{31x+1}$$



$$f(a)=f(1)=\sqrt[5]{31+1}=\sqrt[5]{32}=\sqrt[5]{2^5}=2$$

$$f(x)=(31x+1)^{\frac{1}{5}}$$

$$f'(x)=\frac{1}{5}(31x+1)^{-\frac{4}{5}}x31$$

$$f'(1)=\frac{1}{5}(31+1)^{-\frac{4}{5}}x31=\frac{1}{5}\left(2^{5}\right)^{-\frac{4}{5}}x31=\frac{1}{5}x\frac{1}{24}x31$$

$$=\frac{31}{80}=0.3875$$

$$\therefore f(1.01)\simeq 2+(0.01)(0.3875)=2.003875$$

س12:

$$yx^2=1$$

$$\therefore y=f(x)=\frac{1}{x^2}$$

أوسع مجال والمحاذيات : محاذي عمودي (محور الصادات) $y=0$ $\longrightarrow$ $x^2=0$

أوسع مجال للدالة = $R/\{0\}$

الاستاذ: حمزه حازم الكربلائي





07828808092

محاذي افقي (محور السينات) $y = 0$

التناظر : مع المحور الصادي لانه $\forall x \in R / \{0\}$

$\exists -x \in R / \{0\}$

بحيث $f(x) = f(-x)$

التقاطع مع المحورين : لا يوجد تقاطع مع المحور الصادي $x \neq 0$

ولا مع المحور السيني $y \neq 0$

$$f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$$

$$f'(x) = -2x^{-3} = \frac{-2}{x^3}$$

لا توجد نهايات $\because 0 \neq -2 \Rightarrow f'(x) \neq 0$

أشارة $f'(x)$

$x < 0$	$x = 0$	$x > 0$
+ + + + +	○	− − − − −

الدالة متزايدة في $\{x : x < 0\}$ ومتناقصة في $\{x : x > 0\}$

$$f''(x) = 6x^{-4} = \frac{6}{x^4}$$

لا توجد نقطة انقلاب $\because 6 \neq 0 \Rightarrow f''(x) \neq 0$

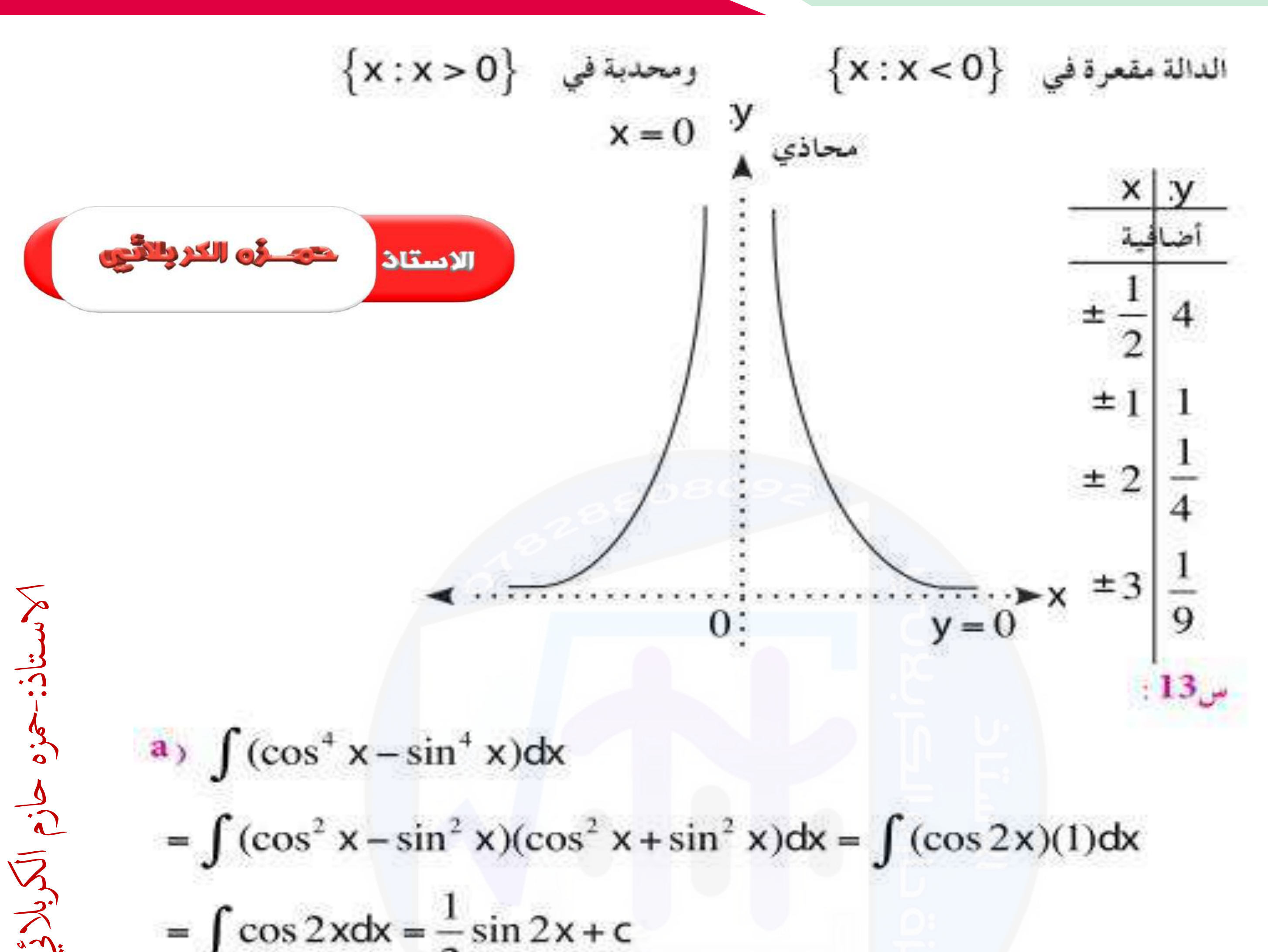
أشارة $f''(x)$

$x < 0$	$x = 0$	$x > 0$
+ + + + +	○	+ + + + +
محدبة		مقعرة

الاستاذ:-حمزه حازم الكربلائي



07828808092



x	y
أضافية	
$\pm\frac{1}{2}$	4
± 1	1
± 2	$\frac{1}{4}$
± 3	$\frac{1}{9}$

س13:

a) $\int(\cos^4 x-\sin^4 x)dx$

$= \int(\cos^2 x-\sin^2 x)(\cos^2 x+\sin^2 x)dx = \int(\cos 2x)(1)dx$

$= \int \cos 2x dx = \frac{1}{2}\sin 2x + c$

b) $\int(\sin 2x-1)(\cos^2 2x+2)dx$

$= \int \cos^2 2x.\sin 2x dx - \int \cos^2 2x dx + 2\int \sin 2x dx - \int 2dx$

$= -\frac{1}{2}\int \cos^2 2x.(-2)\sin 2x dx - \int \frac{1+\cos 4x}{2}dx + 2\int \sin 2x dx - \int 2dx$

$= -\frac{1}{2}\frac{\cos^3 2x}{3} - \frac{1}{2}(x+\frac{1}{4}\sin 4x) + 2x\frac{-1}{2}\cos 2x - 2x + c$

$= -\frac{5}{2}x - \frac{1}{6}\cos^3 2x - \frac{1}{8}\sin 4x - \cos 2x + c$

c) $\int \frac{\ln x}{x}dx = \int \ln x.\frac{1}{x}dx = \frac{(\ln x)^2}{2}+c$

d) $\int \frac{2\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx = 2\int \sin\sqrt[3]{x} \quad x^{-\frac{2}{3}}dx$

الزاوية $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$

مشتقة الزاوية $\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

$= 2\times 3\int \sin\sqrt[3]{x}(\frac{1}{3})x^{-\frac{2}{3}}dx = -6\cos\sqrt[3]{x}+c$

e) $\int \cot x \csc^3 x dx$

مشتقة داخل القوس $(\csc x)^2$

هي $-\csc x \cot x$

$= -\int \csc^2 x.(-\csc x \cot x)\,dx$

$= -\frac{\csc^3 x}{3}+c$

f) $\int \sqrt[3]{3x^3-5x^5}\,dx = \int \sqrt[3]{x^3(3-5x^2)}dx$

$= \int (3-5x^2)^{\frac{1}{3}}(x)dx$

$= \frac{1}{-10}\int (3-5x^2)^{\frac{1}{3}}(-10)(x)dx = \frac{-\frac{1}{10}(3-5x^2)^{\frac{3}{4}}}{\frac{4}{3}}+c$

$= -\frac{3}{40}(3-5x^2)^{\frac{4}{3}}+c$

الاستاذ:-حمزه حازم الكربلائي

07828808092

g) $\int \frac{1}{x^2-14x+49}dx = \frac{1}{(x-7)^2}dx$

$= \int (x-7)^{-2}dx = \frac{(x-7)^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{x-7} + c$

h) $\int \sec^2 3x \; e^{\tan 3x} dx$

مشتقة $\tan 3x$ تساوي $\sec^2 3x.3$

$= \frac{1}{3}\int e^{\tan 3x}.(3)\sec^2 3x dx$

$= \frac{1}{3}e^{\tan 3x} + c$

س14:

$y = \frac{\pi}{4}, x = 1$

$y' = \frac{\cos^2 y}{x}$

لكن $\frac{1}{\cos y} = \sec y$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos^2 y}{x} \rightarrow \frac{dy}{\cos^2 y} = \frac{dx}{x}$

$\int \frac{dy}{\cos^2 y} = \int \frac{dx}{x}$

$\int \sec^2 y dy = \int \frac{dx}{x}$

$\tan y = \ln|x| + c$

نعوض $y = \frac{\pi}{4}, x = 1 \Rightarrow \tan\frac{\pi}{4} = \ln|1| + c \Rightarrow 1 = 0 + c$

$\therefore c = 1$

$\therefore \tan y = \ln|x| + 1$

الاستاذ:-حمزه حازم الكربلائي



07828808092

س15:

$$\frac{dy}{dx} = -2x\tan y \qquad y = \frac{\pi}{2}, x = 0$$

$$\frac{dy}{\tan y} = -2xdx \Rightarrow \frac{dy}{\frac{\sin y}{\cos y}} = -2xdx \Rightarrow \frac{\cos y}{\sin y}dy = -2xdx$$

$$\int \frac{\cos y dy}{\sin y} = -2\int xdx \Rightarrow \ln|\sin y| = -\frac{2x^2}{2} + c$$

$$y = \frac{\pi}{2}, x = 0 \Rightarrow \ln\left|\sin\frac{\pi}{2}\right| = 0 + c \Rightarrow c = 0$$

$$\therefore \ln|\sin y| = -x^2 \Rightarrow \sin y = e^{-x^2}$$

س16: حل المعادلة التفاضلية

$$x\frac{dy}{dx} = y - x \qquad y = 1 \quad x = 1$$ عندما

الحل

$$x\frac{dy}{dx} = y - x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - 1$$

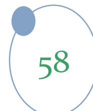
نفرض $v = \frac{y}{x}$

$$y = vx$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dy}$$

الاستاذ حمــزه الكربلائي

الاستاذ:-حمزه حازم الكربلائي



07828808092

الاستاذ حمــزه الكربلائي

$$\not{v}+x\frac{dv}{dy}=\not{v}-1$$

$$\frac{dv}{dy}=\frac{-1}{x}$$

$$\int dv=\int -\frac{1}{x}dx$$

$$v=-\ln|x|+c \qquad \because x=1, y=1$$

$$\frac{1}{1}=-\ln|1|+c$$

$$c=1$$

$$\therefore \frac{y}{x}=-\ln|x|+1$$

س17:

$$\left(x^2+3y^2\right)dx-2xydy=0$$

$$\left(x^2+3y^2\right)dx=2xydy$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+3y^2}{2xy}$$

بالقسمة على $x^2 \neq 0$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1+3\left(\frac{y}{x}\right)^2}{2\frac{y}{x}}$$

نفرض $v=\frac{y}{x} \Rightarrow y=xv$ المشتقة بالنسبة الى x $\frac{dy}{dx}=x\frac{dv}{dx}+v$



07828808092

الاستاذ:-حمزه حازم الكربلائي

نعوض $\Rightarrow x\frac{dv}{dx}+v=\frac{1+3v^2}{2v}$

نفصل المتغيرات $x\frac{dv}{dx}=\frac{1+3v^2}{2v}-v=\frac{1+3v^2-2v^2}{2v}$

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{v^2+1}{2v}$$

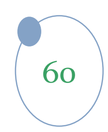
نأخذ تكامل الطرفين $\int\frac{dx}{x}=\int\frac{2vdv}{v^2+1}$

$$\ln|x|=\ln\left(v^2+1\right)+\text{Ln } c$$

$$\ln|x|=\ln c\left(\frac{y^2}{x^2}+1\right)$$

$$x=c\left(\frac{y^2+x^2}{x^2}\right)$$

الاستاذ حمـــزه الكربلائي





07828808092